Anwendung der Methode des treibenden Parameters auf die lineare und nichtlineare Entwicklung spezieller MHD-Instabilitäten in tokamakartigen Plasmen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Klaus-Achim Kratzsch
aus Düsseldorf

Düsseldorf 1985

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543905_0110

Anwendung der Methode des treibenden Parameters auf die lineare und nichtlineare Entwicklung spezieller MHD - Instabilitäten in tokamakartigen Plasmen

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Klaus - Achim Kratzsch

aus Düsseldorf

Düsseldorf 1985

1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Rebhan

2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Suchy

Tag der mündlichen Prüfung: 24. April 1985

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1.	Übersicht	6
2.	Entwicklung linearer idealer MHD - Moden in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze und näherungsweise Berechnung der linearen Anwachsraten	9
2.1.	Einleitung	9
2.2.	Behandlung kompressibler Plasmen	11
2.2.1.	Treibender Parameter	11
2.2.2.	Entwicklung des linearen Eigenmodenproblems nach dem treibenden Parameter	13
2.2.3.	Elimination von $\underline{\xi}_N$ und $\underline{\alpha}_N$ aus den Integrabilitätsbedingungen (2.25)	18
2.3.	Behandlung inkompressibler Plasmen	24
3.	Lösung des exakten linearen Kink - Modenproblems für einen inkompressiblen z - Pinch	25
4.	Näherungsweise Lösung des linearen Kink - Modenproblems für den inkompressiblen z - Pinch	29
4.1.	Wahl eines treibenden Parameters und Entwicklung der Gleichgewichtsgrößen	29
4.2.	Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Vektorpotentials des Vakuumstörmagnetfeldes	31

4.3.	Berechnung des marginalen Verschiebungsfeldes	32
4.4.	Bestimmung des kritischen Wertes b_c des treibenden Parameters	35
4.5.	Berechnung des ersten Entwicklungskoeffizienten der Anwachsraten	37
4.6.	Bestimmung von $\underline{f}_1$	39
4.7.	Bestimmung von γ_2^2	42
4.8.	Diskussion der Ergebnisse der linearen Theorie für den inkompressiblen z - Pinch	45
5.	Näherungsweise Lösung des linearen Eigenmodenproblems bezüglich axialsymmetrischer Störungen für einen kompressiblen z - Pinch	61
6.	Exakte Lösung des linearen Eigenmodenproblems bezüglich axialsymmetrischer Störungen für einen kompressiblen z - Pinch	65
6.1.	Reduktion des Problems auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für f_r	65
6.2.	Lösung der Differentialgleichung (6.11)	68
6.3.	Diskussion der Ergebnisse	73
7.	Untersuchung des nichtlinearen Stabilitätsverhaltens in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze für einen kompressiblen z - Pinch	77
7.1.	Einleitung	77

7.2. Die Entwicklungsgleichungen niedrigster Ordnung 81

7.3. Die Entwicklungsgleichungen zweiter Ordnung 86

7.4. Die Normalenvektoren an die Plasmaoberfläche 90

7.5. Berechnung von $\underline{G}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1)$ und der rechten Seiten der Randbedingungen (7.36) und (7.39) 92

7.6. Zur Lösung von (7.79) und (7.78) 95

7.7. Zur Bestimmung des Vektorpotentials $\underline{\mathcal{A}}_{21}$ 99

7.8. Bestimmung der Konstanten der Lösungen zweiter Ordnung aus den Randbedingungen auf S_0 101

8. Nichtlineare Amplitudengleichung und Berechnung von ϑ_T 105

8.1. Die nichtlineare Amplitudengleichung für $A_1(T)$ 105

8.2. Berechnung von $\rho_0 \vartheta_T r_0^3 B_{0\varphi}^{-1}$ 108

8.3. Diskussion der Ergebnisse der nichtlinearen Rechnung für den kompressiblen z - Pinch 128

9. Zusammenfassung 152

10. Literaturverzeichnis 154

11. Anhang (Auflistung einiger häufig benötigter Operatoren und Abkürzungen) 156

1. Übersicht

Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von Plasmakonfigurationen im Rahmen der idealen Magnetohydrodynamik (MHD) ist von großer Bedeutung. Denn charakteristische Eigenschaften von idealen MHD - Instabilitäten werden im allgemeinen nicht wesentlich durch nicht - ideale Effekte, wie zum Beispiel die Resistivität, die Viskosität usw., beeinflußt. Außerdem gehören die idealen MHD - Instabilitäten zu den gefährlichsten Plasmainstabilitäten, da sie eine Konfiguration innerhalb von Zeiten zerstören können, die sehr klein sind im Vergleich zu Einschlußzeiten, die durch nicht - ideale Effekte bedingt sind. Für Fusionsplasmen bedeutet dies, daß sie gegenüber idealen MHD - Moden stabil sein müssen.

Da selbst im Rahmen der linearen Theorie Stabilitätsuntersuchungen im allgemeinen schon für relativ einfache Modellplasmen recht aufwendig sind, beschränken sich die meisten Betrachtungen bisher auf die Untersuchung des linearen Stabilitätsverhaltens. Einen Überblick hierüber geben zum Beispiel /1, 2/. Es zeigt sich, daß es oftmals für eine gegebene Plasmakonfiguration wesentlich leichter ist, die marginale Mode zu bestimmen, als instabile Moden zu berechnen, welche zum Beurteilen der Gefährlichkeit der Instabilität von Bedeutung sind. Mit dem in Kapitel 2 beschriebenen Näherungsverfahren wird es jedoch möglich, allein aus der Kenntnis der marginalen Mode einen Näherungswert für die Anwachsrate zu erhalten. Dieses Näherungsverfahren wird in den Kapiteln 4 und 5 auf zwei Beispiele angewandt.

Experimente zeigen, daß keine Plasmakonfiguration vollkommen stabil ist. Dabei sieht man, daß gewisse Instabilitäten, die im Rahmen der linearen idealen MHD - Theorie auftreten, keine so bedeutende Rolle spielen, wie zu vermuten wäre. Dies kann durch nichtlineare Sättigungseffekte verstanden werden. Ebenso läßt

sich das explosionsartige Anwachsen mancher Instabilitäten durch nichtlineare Effekte erklären. Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen, wie zum Beispiel /3, 4, 5, 6a, 6b/ oder /7/, beziehen sich auf spezielle Konfigurationen oder benutzen spezielle Symmetrieannahmen. Eine allgemein gültige nichtlineare Behandlung idealer MHD - Moden in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze wurde von E. Rebhan /8, 9/ durchgeführt. Diese ermöglicht es, das nichtlineare Stabilitätsverhalten in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze qualitativ besser zu verstehen und auch quantitativ zu erfassen. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit werden wir für die bereits in Kapitel 3 und 4 betrachtete Plasmakonfiguration das nichtlineare Stabilitätsverhalten in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze entsprechend /9/ untersuchen und eine analytische Lösung des Problems angeben.

Im folgenden betrachten wir stets Plasmakonfigurationen, die von einem Vakuumgebiet umgeben sind, das von einer ideal leitenden Wand begrenzt wird (siehe Abb.1). Für diesen Fall wollen wir die Grundgleichungen der idealen MHD - Theorie formulieren. Bezeichnen ϱ die Dichte und $\underline{v}$ das Geschwindigkeitsfeld des Plasmas, $\underline{B}$ das Magnetfeld und p den Druck im Plasma, $\underline{\alpha}$ das Vektorpotential des Magnetfeldes $\underline{B}^{v}$ im Vakuumbereich und $\underline{n}$ die Normalenvektoren an die Plasmaoberfläche S und die ideal leitende Wand $\mathcal{C}$, so hat man für den Plasmabereich die Gleichungen

$$\varrho\left(\partial \underline{v}/\partial t + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right) = \left(\nabla\times\mu_0^{-1}\underline{B}\right)\times\underline{B} - \nabla p \qquad (1\,01)$$

$$\partial \underline{B}/\partial t = \nabla\times\left(\underline{v}\times\underline{B}\right) \qquad (1\,02)$$

$$\partial p/\partial t = -\left(\underline{v}\cdot\nabla p + \tfrac{5}{3}\, p\,\nabla\cdot\underline{v}\right) \qquad (1\,03)$$

$$\partial \varrho/\partial t = -\nabla\cdot(\varrho\,\underline{v}) \qquad (1\,04)$$

$$\nabla\cdot\underline{B} = 0 \qquad (1\,05)$$

und für das Vakuumgebiet

$$\nabla \times \left(\nabla \times \underline{\mathcal{A}} \right) = \underline{0} \tag{1.06}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{A}} = 0 \ . \tag{1.07}$$

An der Plasma - Vakuum - Grenze sind die sogenannte elektrische Randbedingung

$$\underline{n} \times \partial \underline{\mathcal{A}} / \partial t = - \left(\underline{n} \cdot \underline{v} \right) \underline{B}^{v} \tag{1.08}$$

und die Druckrandbedingung

$$p + B^2/(2\mu_0) = B^{v2}/(2\mu_0) \tag{1.09}$$

zu erfüllen.
An der ideal leitenden Wand lautet die Randbedingung

$$\underline{n} \times \underline{\mathcal{A}} = \underline{0} \ . \tag{1.10}$$

Im folgenden werden wir stets $\mu_0 = 1$ setzen.

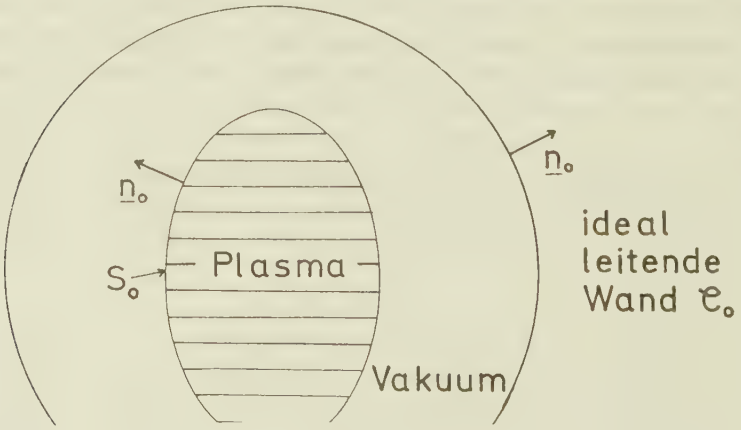


Abb.1: Querschnitt durch eine typische Plasmakonfiguration

2. Entwicklung linearer idealer MHD-Moden in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze und näherungsweise Berechnung der linearen Anwachsraten

2.1. Einleitung

Schon die lineare Theorie idealer MHD-Moden führt sehr oft auf Problemstellungen, die nur noch mit numerischen Methoden und mit Rechnereinsatz behandelt werden können. Deshalb sind Näherungsverfahren zur Berechnung idealer MHD-Moden und insbesondere zur Berechnung der zugehörigen Anwachsraten nützlich.

Die nachfolgend beschriebene, auf dem Konzept des "treibenden Parameters" basierende Entwicklung idealer MHD-Moden in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze ermöglicht es, das lineare Eigenmodenproblem der idealen MHD näherungsweise zu lösen. Dabei besteht ein wesentlicher Vorteil dieses Näherungsverfahrens darin, daß es mit ihm möglich ist, allein aus der Kenntnis der marginalen Mode, eine erste Näherung für die Anwachsraten zu berechnen. Denn im allgemeinen ist die Bestimmung der marginalen Mode, die eine Lösung des Eigenmodenproblems zum Eigenwert 0 ist, einfacher, als die Lösung des vollständigen linearen Eigenmodenproblems. Es ist nämlich möglich (siehe zum Beispiel /16/), die marginale Mode mit Hilfe des Energieprinzips zu bestimmen. In dieses geht nur die Druckrandbedingung (2.07) ein, während die elektrische Randbedingung (2.08) (es handelt sich bei dieser um zwei skalare Randbedingungen) entfällt.

Im folgenden wird zunächst das Konzept des treibenden Parameters λ eingeführt und das lineare Eigenmodenproblem nach Potenzen von $\lambda - \lambda_c$ entwickelt (λ_c bezeichnet den kritischen Wert des treibenden Parameters λ an der linearen Stabilitätsgrenze).

Integrabilitätsbedingungen, die zur Lösbarkeit des sich ergebenden Differentialgleichungssystems erfüllt sein müssen, erlauben es, die Entwicklungskoeffizienten der Anwachsraten zu bestimmen.

In den nachfolgenden Abschnitten wird das Näherungsverfahren auf zwei (auch exakt lösbare) Beispiele angewandt und mit den exakten Lösungen des linearen Eigenmodenproblems verglichen. Im Falle des zweiten Beispiels, der Untersuchung der Stabilität eines z-Pinches mit konstantem Stromprofil und kreisförmigem Querschnitt bezüglich axialsymmetrischer Störungen, war bisher keine Lösung des exakten, linearen Eigenmodenproblems bekannt. Diese wird deshalb im Abschnitt 6 hergeleitet.

Zur Bezeichnung:

Im folgenden werden Gleichgewichtsgrößen stets mit dem Index 0 gekennzeichnet.

Die häufig auftretenden Integrale über das Plasmavolumen werden zur Vereinfachung wie folgt geschrieben

$$\int_{Pl} \underline{\eta} \cdot \underline{\chi} \, dV =: (\underline{\eta}, \underline{\chi}) \quad .$$

Desweiteren werden alle mehrfach auftretenden Abkürzungen, Definitionen, Operatoren und Symbole im Anhang I zusammenfassend aufgelistet.

2.2. Behandlung kompressibler Plasmen

2.2.1. Treibender Parameter

Betrachtet werden MHD-Gleichgewichte, die von einem oder mehreren Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ abhängen. Im allgemeinen wird die lineare Stabilitätsgrenze von diesen Parametern abhängen und kann als Fläche im Parameterraum dargestellt werden. Parameter, deren Wertebereich die Stabilitätsgrenze überschreiten, werden "treibende Parameter" genannt. Im folgenden werden wir zur Vereinfachung annehmen, daß die betrachteten Gleichgewichte von nur einem treibenden Parameter abhängen. Hierdurch entsteht keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich stets ein nur durch einen Parameter beschriebener Weg $\lambda_1(\lambda), \ldots, \lambda_n(\lambda)$ im Parameterraum angeben läßt, längs dessen ein Stabilitätswechsel erfolgt (siehe Abb.2).

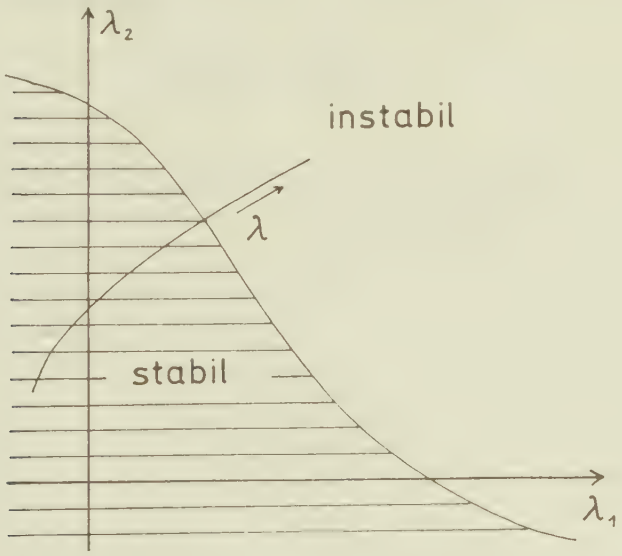


Abb.2: Stabilitätsgrenze im Parameterraum

Entsprechend der Definition des treibenden Parameters λ hängen die linearen Anwachsraten γ von λ ab, und es gilt $\gamma^2(\lambda = \lambda_c) = 0$.

Für die meisten MHD-Gleichgewichte existiert ein treibender Parameter λ, und oftmals bestehen sogar mehrere verschiedene Möglichkeiten, λ zu wählen. Typische Beispiele für treibende Parameter sind der Sicherheitsfaktor (3.11), Parameter, die das Druckprofil bestimmen, der Abstand einer ideal leitenden Wand von der Plasmaoberfläche, etc.

Für die Anwendung sei betont, daß durch geschickte Wahl des treibenden Parameters die Rechnungen oftmals wesentlich vereinfacht werden können.

2.2.2. Entwicklung des linearen Eigenmodenproblems nach dem treibenden Parameter

Durch Einführung des Verschiebungsfeldes $\underline{\xi}(\underline{r},t)$ mit

$$\partial \tilde{\underline{\xi}}(\underline{r}_0,t)/\partial t = \tilde{\underline{v}}(\underline{r}_0+\tilde{\underline{\xi}}(\underline{r}_0,t),t) \tag{2.01}$$

und den Ansatz

$$\tilde{\underline{\xi}}(\underline{r},t) = A(t)\,\underline{\xi}(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad A(t) = \exp(\gamma t) \tag{2.02}$$

erhält man unter Vernachlässigung aller in $\underline{\xi}(\underline{r},t)$ nichtlinearen Terme aus den Gleichungen (1.01) - (1.10) das nachfolgend angegebene Eigenmodenproblem (siehe zum Beispiel /16/). Im Plasmabereich hat man die Gleichung

$$\rho_0 \gamma^2 \underline{\xi} = \underline{F}_0(\underline{\xi}) \tag{2.03}$$

mit

$$\underline{F}_0(\underline{\xi}) := (\nabla\times\underline{B}_0)\times\left[\nabla\times(\underline{\xi}\times\underline{B}_0)\right]+\left\{\nabla\times\left(\nabla\times[\underline{\xi}\times\underline{B}_0]\right)\right\}\times\underline{B}_0 + \\ +\nabla\left(\underline{\xi}\cdot\nabla p_0+\frac{5}{3}p_0\nabla\cdot\underline{\xi}\right), \tag{2.04}$$

und im Vakuumbereich hat man die beiden Gleichungen

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{A}) = \underline{0} \tag{2.05}$$

$$\nabla\cdot\underline{A} = 0 \,. \tag{2.06}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\underline{B}_0 \cdot \left(\nabla \times [\underline{\xi} \times \underline{B}_0] + [\underline{\xi} \cdot \nabla] \underline{B}_0 \right) = \frac{5}{3} p_0 \nabla \cdot \underline{\xi} + \\ + \underline{B}_0^v \cdot \left(\nabla \times \underline{\mathcal{A}} + [\underline{\xi} \cdot \nabla] \underline{B}_0^v \right) \quad \text{auf } S_0 \tag{2.07}$$

$$\underline{n}_0 \times \underline{\mathcal{A}} = - (\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}) \underline{B}_0^v \quad \text{auf } S_0 \tag{2.08}$$

$$\underline{n}_0 \times \underline{\mathcal{A}} = \underline{0} \quad \text{auf } \mathcal{C}_0 . \tag{2.09}$$

In den Gleichungen (2.03) - (2.09) bedeuten:

$\underline{B}_0, \underline{B}_0^v$ die Gleichgewichtsmagnetfelder im Plasma bzw. im Vakuum

p_0 den Gleichgewichtsdruck

ρ_0 die Gleichgewichtsdichte

$\underline{F}_0$ den linearen MHD-Operator

$\underline{\mathcal{A}}$ das Vektorpotential des Vakuumstörmagnetfeldes

$\underline{n}_0$ die Normalenvektoren an die Plasmaoberfläche S_0 bzw. an die ideal leitende Wand $\mathcal{C}_0$.

Für die nachfolgende Entwicklung wird angenommen, daß die Gleichgewichtsgrößen $\underline{B}_0$ und p_0, die Störgrößen $\underline{\xi}$ und $\underline{\mathcal{A}}$, die Anwachsraten γ, die Darstellung $\underline{r}_0(u,v)$ der Wand $\mathcal{C}_0$ und die Normalenvektoren $\underline{n}_0(u,v)$ an die Wand $\mathcal{C}_0$ von einem treibenden Parameter λ abhängen. Eine Abhängigkeit der Gleichgewichtsdichte ρ_0 und der Form der Plasmaoberfläche S_0 von dem treibenden Parameter wird zur Vereinfachung der Rechnung ausgeschlossen, was allerdings keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Aufgrund der Annahme, daß die genannten Größen hinreichend glatt von dem treibenden Parameter λ abhängen, lassen sich die folgenden Reihenentwicklungen bezüglich $\tau = \lambda - \lambda_c$ angeben:

$$p_0(\underline{x};\lambda) = \sum_{\ell=0} p_{0\ell}(\underline{x}) \tau^\ell \tag{2.10}$$

$$\underline{B}_0(\underline{r};\lambda) = \sum_{l=0} \underline{B}_{0l}(\underline{r})\,\tau^l \tag{2.11}$$

$$\underline{B}_0^{\nu}(\underline{r};\lambda) = \sum_{l=0} \underline{B}_{0l}^{\nu}(\underline{r})\,\tau^l \tag{2.12}$$

$$\underline{F}(\underline{r};\lambda) = \sum_{l=0} \underline{F}_l(\underline{r})\,\tau^l \tag{2.13}$$

$$\underline{\Omega}(\underline{r};\lambda) = \sum_{l=0} \underline{\Omega}_l(\underline{r})\,\tau^l \tag{2.14}$$

$$\gamma^2(\lambda) = \sum_{l=0} \gamma_l^2\,\tau^l \tag{2.15}$$

$$\underline{r}_0(u,v;\lambda) = \sum_{l=0} \underline{r}_{0l}(u,v)\,\tau^l \tag{2.16}$$

$$\underline{n}_0(u,v;\lambda) = \sum_{l=0} \underline{n}_{0l}(u,v)\,\tau^l\,. \tag{2.17}$$

Die Forderung, daß der Plasmarand nicht vom treibenden Parameter abhängt, bedeutet, daß auf S_0 $\underline{n}_{0l} = 0$ für $l \geq 1$ gilt. Geht man mit den Entwicklungen (2.10) - (2.17) in das lineare Eigenmodenproblem (2.03) - (2.09) ein und ordnet die Gleichungen nach Potenzen von τ, so erhält man mit den im Anhang gegebenen Definition (A.1) - (A.5) für N = 0, 1, 2,

$$\underline{F}_{00}(\underline{\xi}_N) = -\sum_{K=1}^{N} \left\{-\rho_0 \gamma_K^2\,\underline{\xi}_{N-K} + \underline{F}_{0K}(\underline{\xi}_{N-K})\right\} \tag{2.18}$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \underline{\Omega}_N\right) = \underline{0} \tag{2.19}$$

$$\nabla \cdot \underline{\Omega}_N = 0 \tag{2.20}$$

mit den Randbedingungen

$$\sum_{K=0}^{N}\left\{\sum_{i=0}^{K}\left[\underline{B}_{0K-i}\cdot\left(\underline{B}_{Ai}(\underline{\xi}_{N-K}) + (\underline{\xi}_{N-K}\cdot\nabla)\cdot\underline{B}_{0i}\right) - \underline{B}_{0K-i}^{\nu}\cdot\left((\underline{\xi}_{N-K}\cdot\nabla)\underline{B}_{0i}^{\nu}\right)\right] + \right.$$
$$\left. - \underline{B}_{0K}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\Omega}_{N-K}) - \frac{5}{3}\,p_{0K}\,\nabla\cdot\underline{\xi}_{N-K}\right\} = 0 \tag{2.21}$$

$$\underline{n}_o \times \underline{\mathfrak{A}}_N = -\sum_{K=0}^{N} (\underline{n}_o \cdot \underline{\mathfrak{T}}_{N-K})\, \underline{\mathfrak{B}}^{\vee}_{oK} \tag{2.22}$$

auf S_o und

$$\sum_{K=0}^{N} \underline{n}_{oK} \times \left(\hat{\underline{\mathfrak{A}}}_{N-K} + \underline{\mathfrak{A}}_{N-K} \right) = \underline{0} \tag{2.23}$$

auf $\mathfrak{r}_{oo}$ mit

$$\hat{\underline{\mathfrak{A}}}_0 := \underline{0}$$

$$\hat{\underline{\mathfrak{A}}}_\ell := \sum_{K=1}^{\ell} \frac{1}{K!} \sum_{j=K}^{\ell} \left(\mathbb{R}_{j,K} : \overset{(K)}{\overbrace{\nabla \cdots \nabla}}\, \underline{\mathfrak{A}}_{\ell-j} \right)\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} \qquad \ell = 1,2,\ldots \tag{2.24}$$

$$\mathbb{R}_{j,K} := \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_K=j} \underline{\mathfrak{r}}_{oi_1}\, \underline{\mathfrak{r}}_{oi_2} \ldots \underline{\mathfrak{r}}_{oi_K} \,.$$

Das Auftreten von $\hat{\underline{\mathfrak{A}}}_\ell$ ist dadurch begründet, daß eine Änderung von $\mathfrak{r}$ mit einer Veränderung der Randfläche $\mathfrak{e}_o$ verbunden ist. Der Übersichtlichkeit halber, formulieren wir die Randbedingung (2.23) für N = 0, 1 und 2 explizit, und es ist:

$$N=0: \quad \underline{n}_{oo} \times \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} = \underline{0}$$

$$N=1: \quad \underline{n}_{o1} \times \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + \underline{n}_{oo} \times \left[(\underline{\mathfrak{r}}_{o1} \cdot \nabla)\, \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + \underline{\mathfrak{A}}_1\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} \right] = \underline{0}$$

$$N=2: \quad \underline{n}_{o2} \times \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + \underline{n}_{o1} \times \left[(\underline{\mathfrak{r}}_{o1} \cdot \nabla)\, \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + \underline{\mathfrak{A}}_1\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} \right] +$$

$$+ \underline{n}_{oo} \times \left[\underline{\mathfrak{A}}_2\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + (\underline{\mathfrak{r}}_{o1} \cdot \nabla)\, \underline{\mathfrak{A}}_1\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + (\underline{\mathfrak{r}}_{o2} \cdot \nabla)\, \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\underline{\mathfrak{r}}_{o1} \underline{\mathfrak{r}}_{o1} : \nabla\nabla)\, \underline{\mathfrak{A}}_o\Big|_{\underline{\mathfrak{r}}_{oo}} \right] = \underline{0} \,.$$

Für N = 0 hat man in den Gleichungen (2.18) - (2.20) ein homo-

genes Differentialgleichungssystem, das mit den Randbedingungen (2.21) - (2.23) die marginale Mode $\underline{\mathfrak{f}}_0$, $\underline{\mathfrak{a}}_0$ bestimmt.

Für $N \geq 1$ sind mit (2.18) - (2.23) inhomogene Probleme gegeben, die nur dann Lösungen haben, wenn die notwendigen Integrabilitätsbedingung

$$\gamma_N^2 \, \rho_0 \left(\underline{\mathfrak{f}}_0, \underline{\mathfrak{f}}_0 \right) = \sum_{K=1}^{N-1} - \gamma_K^2 \, \rho_0 \left(\underline{\mathfrak{f}}_0, \underline{\mathfrak{f}}_{N-K} \right) + \sum_{K=0}^{N} \left(\underline{\mathfrak{f}}_0, \underline{\mathfrak{F}}_{0K} \left(\underline{\mathfrak{f}}_{N-K} \right) \right) \qquad (2.25)$$

des inhomogenen Gleichungssystems (2.18) erfüllt sind. (Daß die Integrabilitätsbedingungen auch hinreichend sind, ergibt sich an den untersuchten Beispielen explizit.) Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, daß die Integrabilitätsbedingungen (2.25) entgegen dem ersten Anschein nicht von $\underline{\mathfrak{f}}_N$ und $\underline{\mathfrak{a}}_N$ abhängt. Damit wird es dann möglich, sukzessive die Entwicklungskoeffizienten $\underline{\mathfrak{f}}_N$, $\underline{\mathfrak{a}}_N$, γ_{N+1}^2 zu bestimmen.

2.2.3. Elimination von $\underline{\mathfrak{F}}_N$ und $\underline{\mathfrak{A}}_N$ aus den Integrabilitätsbedingungen (2.25)

Zunächst werden die in der Integrabilitätsbedingung (2.25) in der rechten Summe auftretenden Integrale umgeformt. Hierzu schreiben wir:

$$\left(\underline{\mathfrak{F}}_0 , \underline{\mathbb{F}}_{0K}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K})\right) = \sum_{i=1}^{4} I_i^{K,N} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} I_1^{K,N} &:= \left(\underline{\mathfrak{F}}_0, \sum_{j=0}^{K} (\nabla \times \underline{\mathfrak{B}}_{0j}) \times \underline{\mathfrak{B}}_{1K-j}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K})\right) \\ &= -\sum_{j=0}^{K} \left((\nabla \times \underline{\mathfrak{B}}_{0j}) , \underline{\mathfrak{F}}_0 \times \underline{\mathfrak{B}}_{1K-j}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K})\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} I_2^{K,N} &:= \left(\underline{\mathfrak{F}}_0 , \sum_{j=0}^{K} (\nabla \times \underline{\mathfrak{B}}_{1j}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K})) \times \underline{\mathfrak{B}}_{0K-j}\right) \\ &= -\sum_{j=0}^{K} \left((\nabla \times \underline{\mathfrak{B}}_{1j}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K})) , (\underline{\mathfrak{F}}_0 \times \underline{\mathfrak{B}}_{0K-j})\right) \\ &= -\sum_{j=0}^{K} \left(\underline{\mathfrak{B}}_{1j}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}) , \underline{\mathfrak{B}}_{1K-j}(\underline{\mathfrak{F}}_0)\right) + \\ &\qquad - \sum_{j=0}^{K} \int_{S_{00}} \left\{(\underline{n}_0 \cdot \underline{\mathfrak{F}}_0)\, \underline{\mathfrak{B}}_{0K-j} \cdot \underline{\mathfrak{B}}_{1j}(\underline{\mathfrak{F}}_{N-K})\right\} d\sigma \quad . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Hierbei wurde partiell integriert und benutzt, daß S_0 nicht von dem treibenden Parameter abhängt ($\underline{n}_0 \cdot \underline{\mathfrak{B}}_0 = 0 \Longrightarrow \underline{n}_0 \cdot \underline{\mathfrak{B}}_{0\ell} = 0$). Durch partielle Integration findet man weiter:

$$I_3^{K,N} := \left(\underline{f}_o \,,\, \nabla \left(\underline{f}_{N-K} \cdot \nabla p_{oK} \right) \right)$$

$$= -\left((\nabla \cdot \underline{f}_o)\, \underline{f}_{N-K} \,,\, \nabla p_{oK} \right) + \int_{S_{oo}} (\underline{n}_o \cdot \underline{f}_o)\, \underline{f}_{N-K} \cdot \nabla p_{oK} \, d\sigma \qquad (2.29)$$

$$I_4^{K,N} := \frac{5}{3} \left(\underline{f}_o \,,\, \nabla \left(p_{oK} \nabla \cdot \underline{f}_{N-K} \right) \right)$$

$$= -\frac{5}{3} \left((\nabla \cdot \underline{f}_o)\, p_{oK} \nabla \,,\, \underline{f}_{N-K} \right) + \frac{5}{3} \int_{S_{oo}} (\underline{n}_o \cdot \underline{f}_o)\, p_{oK}\, \nabla \cdot \underline{f}_{N-K} \, d\sigma \,. \qquad (2.30)$$

Faßt man die in (2.28) - (2.30) auftretenden Oberflächenintegrale zusammen und summiert von 0 bis N, so erhält man unter Benutzung der Randbedingung (2.21)

$$\sum_{K=0}^{N} \int_{S_{oo}} (\underline{n}_o \cdot \underline{f}_o) \Big\{ (\underline{n}_o \cdot \underline{f}_{N-K}) (\underline{n}_o \cdot \nabla) \Big[p_{oK} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{K} \left(\underline{B}_{oj} \cdot \underline{B}_{oK-j} - \underline{B}_{oj}^{v} \cdot \underline{B}_{oK-j}^{v} \right) \Big] + \qquad (2.31)$$

$$- \underline{B}_{oK}^{v} \cdot (\nabla \times \underline{\Omega}_{N-K}) \Big\} \, d\sigma \,.$$

Dabei wurden die Terme $\underline{B}_{oK-j}^{(v)} \cdot (\underline{f}_{m-K} \cdot \nabla \underline{B}_{oj}^{(v)})$ aus (2.21) symmetrisiert und benutzt, daß aus der Gleichgewichtsbeziehung $p_o + B_o^2/2 = B_o^{v\,2}/2$ folgt

$$\underline{f} \cdot \nabla \left(p_o + B_o^2/2 - B_o^{v\,2}/2 \right) = \underline{n}_o \cdot \underline{f}\ \ \underline{n}_o \cdot \nabla \left(p_o + B_o^2/2 - B_o^{v\,2}/2 \right)$$

(siehe /9/ Abschnitt 4.1). Führt man weiterhin zur Schreibvereinfachung die (sogenannten) Energieintegrale

$$W_K^{Pl}[\underline{\eta}, \underline{\chi}] := \frac{1}{2} \Big\{ \sum_{j=0}^{K} \Big[\left((\nabla \times \underline{B}_{oj}),\, \underline{\eta} \times \underline{B}_{1K-j}(\underline{\chi}) \right) + \left(\underline{B}_{1j}(\underline{\chi}),\, \underline{B}_{1K-j}(\underline{\eta}) \right) \Big] + \qquad (2.32)$$

$$+ \Big[\left((\nabla \cdot \underline{\eta})\, \underline{\chi} \,,\, \nabla p_{oK} \right) + \frac{5}{3} \left((\nabla \cdot \underline{\eta})\, p_{oK} \nabla \,,\, \underline{\chi} \right) \Big]$$

und

$$W_K^{S_{oo}}[\underline{\eta},\underline{\chi}] := \frac{1}{2}\int_{S_{oo}} (\underline{n}_o\cdot\underline{\eta})(\underline{n}_o\cdot\underline{\chi})(\underline{n}_o\cdot\nabla)\Big[\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{K}\big(\underline{B}_{oj}^{\nu}\cdot\underline{B}_{oK-j}^{\nu} - \underline{B}_{oj}\cdot\underline{B}_{oK-j}\big) - p_{oK}\Big]d\sigma \quad (2.33)$$

ein, so bekommt man schließlich aus (2.26) - (2.33) für die Integrabilitätsbedingungen (2.25)

$$-\gamma_N^2\,\rho_o\left(\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_o\right) = 2\sum_{K=0}^{N}\Big\{W_K^{Pl}[\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}] + W_K^{S_{oo}}[\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}]\Big\} + \\ + \sum_{K=1}^{N-1}\gamma_K^2\,\rho_o\left(\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}\right) + \sum_{K=0}^{N}\int_{S_{oo}}(\underline{n}_o\cdot\underline{\mathfrak{F}}_o)\,\underline{B}_{oK}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_{N-K})\,d\sigma \quad . \quad (2.34)$$

In den Energieintegralen in (2.34) läßt sich, da diese in eine symmetrische Form gebracht werden können /16/, $\underline{\mathfrak{F}}_N$ mit Hilfe der bekannten Beziehung

$$2\Big\{W_o^{Pl}[\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_N] + W_o^{S_{oo}}[\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_N]\Big\} + \int_{S_{oo}}(\underline{n}_o\cdot\underline{\mathfrak{F}}_N)\,\underline{B}_{oo}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_o)\,d\sigma = \\ = -\left(\underline{\mathfrak{F}}_N,\underline{\mathfrak{F}}_{oo}(\underline{\mathfrak{F}}_o)\right) = 0 \quad (2.35)$$

eliminieren, die wegen $\underline{\mathfrak{F}}_{oo}(\underline{\mathfrak{F}}_o) = 0$ (Gleichung (2.18) für N = 0) erfüllt ist. Nach der Elimination von $\underline{\mathfrak{F}}_N$ bekommt man:

$$-\gamma_N^2\,\rho_o\left(\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_o\right) = +\sum_{K=1}^{N-1}\gamma_K^2\,\rho_o\left(\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}\right) + 2\sum_{K=1}^{N}\Big\{W_K^{Pl}[\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}] + \\ + W_K^{S_{oo}}[\underline{\mathfrak{F}}_o,\underline{\mathfrak{F}}_{N-K}] + \frac{1}{2}\int_{S_{oo}}(\underline{n}_o\cdot\underline{\mathfrak{F}}_o)\,\underline{B}_{oK}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_{N-K})\,d\sigma\Big\} + \quad (2.36) \\ + \int_{S_{oo}}\Big[(\underline{n}_o\cdot\underline{\mathfrak{F}}_o)\,\underline{B}_{oo}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_N) - (\underline{n}_o\cdot\underline{\mathfrak{F}}_N)\,\underline{B}_{oo}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_o)\Big]d\sigma \quad .$$

Eine Abhängigkeit der Entwicklungskoeffizienten γ_N^2 von $\underline{\mathfrak{F}}_N$ und $\underline{\mathfrak{A}}_N$ tritt jetzt nur noch in dem letzten Oberflächenintegral in

(2.36) auf. $\underline{\mathcal{F}}_N$ läßt sich hierin mit Hilfe der Randbedingung (2.22) eliminieren. Mit

$$-\int_{S_{oo}} (\underline{n}_o \cdot \underline{\mathcal{F}}_N)\, \underline{\mathcal{B}}^{v}_{oo} \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o)\, d\sigma =$$

$$= \int_{S_{oo}} \Big(\underline{n}_o \times \underline{\mathcal{A}}_N + \sum_{K=1}^{N} (\underline{n}_o \cdot \underline{\mathcal{F}}_{N-K})\, \underline{\mathcal{B}}^{v}_{oK} \Big) \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o)\, d\sigma$$

und nochmaliger Anwendung der Randbedingung (2.22) für N = 0 erhält man für das Oberflächenintegral

$$\int_{S_{oo}} \left[(\underline{n}_o \cdot \underline{\mathcal{F}}_o)\, \underline{\mathcal{B}}^{v}_{oo} \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_N) - (\underline{n}_o \cdot \underline{\mathcal{F}}_N)\, \underline{\mathcal{B}}^{v}_{oo} \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o) \right] d\sigma =$$

$$= \sum_{K=1}^{N} \int_{S_{oo}} (\underline{n}_o \cdot \underline{\mathcal{F}}_{N-K})\, \underline{\mathcal{B}}^{v}_{oK} \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o)\, d\sigma + \qquad (2.37)$$

$$+ \int_{S_{oo}} \left[(\underline{n}_o \times \underline{\mathcal{A}}_N) \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o) - (\underline{n}_o \times \underline{\mathcal{A}}_o) \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_N) \right] d\sigma \ .$$

Im letzten Schritt soll nun $\underline{\mathcal{A}}_N$ aus (2.37) eliminiert werden. Hierzu wird das Integral über die Plasmaoberfläche auf ein Integral über die ideal leitende Wand umgeschrieben und zweimal die Randbedingung (2.23) ausgenutzt.

$$\int_{S_{oo}} \left[\underline{n}_o \cdot \left(\underline{\mathcal{A}}_N \times (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o) \right) - \underline{n}_o \cdot \left(\underline{\mathcal{A}}_o \times (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_N) \right) \right] d\sigma$$

$$+ \int_{(Vak)_{oo}} \nabla \cdot \left[\underline{\mathcal{A}}_N \times (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o) - \underline{\mathcal{A}}_o \times (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_N) \right] dV$$

$$= \int_{\mathcal{L}_{oo}} \left[(\underline{n}_{oo} \times \underline{\mathcal{A}}_N) \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o) - (\underline{n}_{oo} \times \underline{\mathcal{A}}_o) \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_N) \right] d\sigma \qquad (2.37a)$$

$$= \int_{\mathcal{L}_{oo}} (\underline{n}_{oo} \times \underline{\mathcal{A}}_N) \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o)\, d\sigma$$

$$= -\int_{\mathcal{L}_{oo}} \Big[\underline{n}_{oo} \times \hat{\underline{\mathcal{A}}}_N + \sum_{K=1}^{N} \underline{n}_{oK} \times \big(\hat{\underline{\mathcal{A}}}_{N-K} + \underline{\mathcal{A}}_{N-K} \big) \Big] \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o)\, d\sigma \ .$$

Da der Integrand des Integrals über den Vakuumbereich verschwindet,

$$\nabla\cdot\left[\underline{a}_N\times(\nabla\times\underline{a}_0)-\underline{a}_0\times(\nabla\times\underline{a}_N)\right]=-\underline{a}_N\cdot\left[\nabla\times(\nabla\times a_0)\right]+ \tag{2.37b}$$
$$+(\nabla\times\underline{a}_N)\cdot(\nabla\times\underline{a}_0)-(\nabla\times\underline{a}_0)\cdot(\nabla\times\underline{a}_N)+\underline{a}_0\cdot\left[\nabla\times(\nabla\times\underline{a}_N)\right]=0\ ,$$

erhält man den folgenden Ausdruck für die Entwicklungskoeffizienten γ_N^2

$$-\gamma_N^2\,\rho_0\left(\underline{f}_0,\underline{f}_0\right)=2\sum_{K=1}^{N}\left\{W_K^{A}\left[\underline{f}_0,\underline{f}_{N-K}\right]+W_K^{S_{00}}\left[\underline{f}_0,\underline{f}_{N-K}\right]\right\}+$$
$$+\sum_{K=1}^{N}\int_{S_{00}}\left[(\underline{n}_0\cdot\underline{f}_0)\,\underline{B}_{0K}^{V}\cdot(\nabla\times\underline{a}_{N-K})+(\underline{n}_0\cdot\underline{f}_{N-K})\,\underline{B}_{0K}^{V}\cdot(\nabla\times\underline{a}_0)\right]d\sigma+ \tag{2.38}$$
$$+\sum_{K=1}^{N-1}\gamma_K^2\,\rho_0\left(\underline{f}_0,\underline{f}_{N-K}\right)+$$
$$-\int_{\tau_{00}}\left[\underline{n}_{00}\times\hat{\underline{a}}_N+\sum_{K=1}^{N}\underline{n}_{0K}\times\left(\hat{\underline{a}}_{N-K}+\underline{a}_{N-K}\right)\right]\cdot(\nabla\times\underline{a}_0)\,d\sigma\ .$$

Er besitzt die gewünschte Form

$$\gamma_N^2=f_N\left(\gamma_{N-1}^2,\dots,\gamma_1^2,\underline{f}_{N-1},\dots,\underline{f}_0,\underline{a}_{N-1},\dots,\underline{a}_0\right)\ .$$

Die Gleichungen (2.18) - (2.20) mit den Randbedingungen (2.21) - (2.23) liefern jetzt mit der Integrabilitätsbedingung (2.38) sukzessive die gesuchten Entwicklungsgrößen $\underline{f}_N$, $\underline{a}_N$, γ_{N+1}^2 aus (2.13) - (2.15).

Insbesondere erhält man die erste Näherung γ_1^2 für die Anwachsraten γ^2 bereits aus der marginalen Mode $\underline{f}_0$, $\underline{a}_0$. Es ist nämlich

$$-\gamma_1^2\,\varrho_0(\underline{\xi}_0,\underline{\xi}_0) = 2\left\{W_1^{Pl}[\underline{\xi}_0,\underline{\xi}_0] + W_1^{S_{00}}[\underline{\xi}_0,\underline{\xi}_0]\right\} +$$

$$+ 2\int_{S_{00}} (\underline{n}_0\cdot\underline{\xi}_0)\,\underline{\mathfrak{F}}^{v}_{01}\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_0)\,d\sigma + \tag{2.39}$$

$$- \int_{\Sigma_{00}} \left(\underline{n}_{00}\times[(\underline{\chi}_{01}\cdot\nabla)\underline{\mathfrak{A}}_0] + \underline{n}_{01}\times\underline{\mathfrak{A}}_0\right)\cdot(\nabla\times\underline{\mathfrak{A}}_0)\,d\sigma\ .$$

Für den Fall, daß die Form der ideal leitenden Wand und ihr Abstand von der Plasmaoberfläche nicht von dem treibenden Parameter abhängt, verschwinden die in (2.16) und (2.17) auftretenden Entwicklungskoeffizienten $\underline{\chi}_{0l}$ und $\underline{n}_{0l}$ für $l \geq 1$. Damit vereinfacht sich (2.38), da dann das Oberflächenintegral über die ideal leitende Wand verschwindet.

2.3. Behandlung inkompressibler Plasmen

Es bedeutet in manchen Fällen eine wesentliche Erleichterung, wenn man annimmt, daß das Plasma inkompressibel ist. In diesem Fall ist die Gleichung (1.03) durch $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ zu ersetzen. Die Annahme der Inkompressiblität mag zwar unrealistisch erscheinen, jedoch stellt sie in der Nähe der marginalen Grenze eine gute Näherung dar. Es kann nämlich gezeigt werden (siehe /13/, Seite 861), daß die marginale Mode in vielen Fällen $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ exakt erfüllt.

In dem durch die Gleichungen (2.03) - (2.09) definierten Eigenmodenproblem ist jetzt in der Gleichung (2.04) der Term $\underline{\xi} \cdot \nabla p_0 + 5/3\, p_0 \nabla \cdot \underline{\xi}$ durch p_1 zu ersetzen. Weiterhin ist in der Gleichung (2.07) der Term $5/3\, p_0 \nabla \cdot \underline{\xi}$ durch $p_1 - \underline{\xi} \cdot \nabla p_0$ zu ersetzen. Die noch unbekannte Funtion $\tilde{p}_1(\underline{r},t) = p_1(r) \cdot \exp(\gamma t)$ wird bei der Lösung des Eigenwertproblems für den inkompressiblen Fall bestimmt.

Setzt man für p die Entwicklung

$$p_1(\tau,\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{1l}(\tau)\, \tau^l \qquad (2.40)$$

an, und berücksichtigt, daß für $l = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $\operatorname{div} \underline{\xi}_l = 0$, so gelangt man durch eine zu Abschnitt 2.2. analoge Vorgehensweise zu Gleichungen, die eine sukzessive Lösung des Eigenwertproblems für inkompressible Plasmen gestatten. Auf die explizite Angabe dieser Gleichungen, soll hier allerdings verzichtet werden. Die Vorgehensweise wird an dem in Abschnitt 4. betrachteten Beispiel veranschaulicht.

Lösung des exakten linearen Kink - Modenproblems für einen inkompressiblen Z-Pinch

Betrachtet wird ein in z-Richtung periodisches, zylindrisches Plasma mit konstantem Stromprofil und kreisförmigem Querschnitt, das von einer konzentrischen, ideal leitenden Wand umgeben ist. Diese Plasmakonfiguration kann (siehe zum Beispiel /12/) in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) durch die folgenden Gleichgewichtsgrößen beschrieben werden (x := r / r_o):

$$\begin{aligned} \underline{j}_0 &= \frac{2\,B_{0\varphi}}{r_0}\,\underline{e}_z \\ \underline{B}_0 &= B_{0\varphi}\,(x\,\underline{e}_\varphi + k\,\underline{e}_z) \\ \underline{B}_0^* &= B_{0\varphi}\,(x^{-1}\,\underline{e}_\varphi + k\,\underline{e}_z) \\ p_0 &= B_{0\varphi}^2\,(1-x^2)\quad , \end{aligned} \tag{3.01}$$

wobei r_o den Plasmaradius und $B_{0\varphi}$ die Stärke des poloidalen Magnetfeldes am Plasmarand bezeichnet. Die Position der ideal leitenden Wand wird durch $x_w = r_w / r_o$ festgelegt.

Im folgenden soll die Stabilität dieser Konfiguration gegen Störungen der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\xi}}(\underline{r},t) &= \underline{\xi}(\underline{r})\,\exp(\gamma t) \\ \underline{\xi}(\underline{r}) &= \underline{\xi}^{m,k}(x)\,\exp(im\varphi + ikz) \end{aligned} \tag{3.02}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\Pi}}(\underline{r},t) &= \underline{\Pi}(\underline{r})\,\exp(\gamma t) \\ \underline{\Pi}(\underline{r}) &= \underline{\Pi}^{m,k}(x)\,\exp(im\varphi + ikz) \end{aligned} \tag{3.03}$$

mit ganzzahligem m und $k = n \cdot 2\pi/L$ untersucht werden, wobei L eine als frei wählbar angenommene Periodizitätslänge bezeichnen soll. Für $m \neq 0$ und $n \neq 0$ handelt es sich dabei um die sogenannten Kink - Moden.

Die Lösung des linearen Eigenmodenproblems (2.03) - (2.09) mit den in Abschnitt 2.3. für inkompressible Plasmen angegebenen Änderungen ist für diesen Fall bereits 1957 von Taylor /11/, /12/ angegeben worden. Wir werden deshalb an dieser Stelle die dort erhaltenen Ergebnisse nur zusammenfassend wiedergeben.

Man erhält:

$$\begin{aligned} \xi_r^{m,k}(y) &= C\left\{ J'_{|m|}(y) + m\beta\, J_{|m|}(y)/y \right\} \\ \xi_\varphi^{m,k}(y) &= iC\left\{ \beta\, J'_{|m|}(y) + m\, J_{|m|}(y)/y \right\} \\ \xi_z^{m,k}(y) &= -iC\left(\beta^2 - 1\right)^{1/2} J_{|m|}(y) \quad , \end{aligned} \tag{3.04}$$

wobei J die Besselfunktionen sind und

$$Y(x) := (\beta^2 - 1)^{1/2}\, \hat{\varkappa}\, x \tag{3.04a}$$

$$\beta := \frac{2M}{\Omega^2 + M^2} \tag{3.04b}$$

$$M := m + b\hat{\varkappa} \tag{3.04c}$$

$$\Omega^2 := \frac{\gamma^2 \rho_0 r_0^2}{B_{0\varphi}^2} \tag{3.04d}$$

$$\hat{\varkappa} := n\varkappa := kr_0 \tag{3.04e}$$

ist. Des weiteren ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}l_z^{m,\kappa}(\hat{x},x) &= \mathcal{B}_{o\varphi}\, \xi_r^{m,\kappa}\big|_{S_o}\; F_{|m|}(\hat{x},x) \\
\mathcal{O}l_\varphi^{m,\kappa}(\hat{x},x) &= \frac{m}{\hat{x}x}\, \mathcal{O}l_z^{m,\kappa}(\hat{x},x) + \left(i\Psi_1^{m,\kappa}(\hat{x},x)\right)' \\
\mathcal{O}l_r^{m,\kappa}(\hat{x},x) &= \frac{m}{\hat{x}x}\quad \Psi^{m,\kappa}(\hat{x},x) - \left(i\mathcal{O}l_z^{m,\kappa}(\hat{x},x)\right)'
\end{aligned} \tag{3.05}$$

mit

$$\Psi^{m,\kappa}(\hat{x},x) = \frac{iM\,\mathcal{B}_{o\varphi}}{\hat{x}}\,\xi_r^{m,\kappa}\big|_{S_o}\; G_{|m|}(\hat{x},x) \tag{3.06}$$

und

$$G_m(\hat{x},x) := \frac{I_m(|\hat{x}|x)\,K_m'(|\hat{x}|x_w) - K_m(|\hat{x}|x)\,I_m'(|\hat{x}|x_w)}{I_m'(|\hat{x}|)\,K_m'(|\hat{x}|x_w) - K_m'(|\hat{x}|)\,I_m'(|\hat{x}|x_w)} \tag{3.07}$$

$$F_m(\hat{x},x) := \frac{I_m(|\hat{x}|x)\,K_m(|\hat{x}|x_w) - K_m(|\hat{x}|x)\,I_m(|\hat{x}|x_w)}{I_m(|\hat{x}|)\,K_m(|\hat{x}|x_w) - K_m(|\hat{x}|)\,I_m(|\hat{x}|x_w)} \tag{3.08}$$

$$G_m'(\hat{x},x) := \partial G_m / \partial(|\hat{x}|x)\;,\quad F_m'(\hat{x},x) := \partial F_m / \partial(|\hat{x}|x)$$

wobei I und K die modifizierten Besselfunktionen sind.

Die Druckrandbedingung (2.07) liefert für y(1) die Gleichung

$$\frac{Y\,J_{|m|}'(Y)}{m\,J_{|m|}(Y)} + \frac{m}{|m|}\left(Y^2+\hat{x}^2\right)^{-1/2}\left\{\frac{1}{|\hat{x}|} + \frac{2}{mM\,G_{|m|}(\hat{x},1)}\cdot\frac{Y^2}{Y^2+\hat{x}^2}\right\} = 0\quad, \tag{3.09}$$

y(1) hängt über β noch von Ω^2, b und $\hat{x}$ ab und kann daher so bestimmt werden, daß Gleichung (3.09) erfüllt ist. Bezeichnet man deren Lösung mit $\bar{y}$, so folgt aus (3.04a) - (3.04d) schließlich

$$\begin{aligned}
\Omega^2 &= M\left\{2|\hat{x}|\left(\bar{Y}^2+\hat{x}^2\right)^{-1/2}\frac{m}{|m|} - M\right\} \\
&= (m+nq)\left\{2|\hat{x}|\left(\bar{Y}^2+\hat{x}^2\right)^{-1/2}\frac{m}{|m|} - (m+nq)\right\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Die hier neu eingeführte Größe q ist der sogenannte Sicherheitsfaktor, der als das Verhältnis von Längsfluß zu Querfluß definiert ist.

$$q = \frac{r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 B_{0\varphi}\, b\, x\, dx\, d\varphi}{r_0 \int_0^{L} \int_0^1 B_{0\varphi}\, x\, dx\, dz} = \frac{2\pi r_0 b}{L} = \varkappa b \qquad (3.11)$$

Eine Diskussion der Ergebnisse erfolgt am Ende des nächsten Kapitels, in dem das selbe Problem mit dem Näherungsverfahren aus Kapitel 2 behandelt wird.

4. Näherungsweise Lösung des linearen Kink-Modenproblems für den inkompressiblen Z-Pinch

4.1 Wahl eines treibenden Parameters und Entwicklung der Gleichgewichtsgrößen

Wir betrachten wieder die in Abschnitt 3 durch (3.01) angegebene Gleichgewichtskonfiguration und werden jetzt mit Hilfe des in Kapitel 2 hergeleiteten Näherungsverfahrens die ersten beiden Entwicklungskoeffizienten für die Störgrößen $\underline{f}$ und $\underline{\alpha}$ sowie die Anwachsraten γ bestimmen.

Hierzu muß zunächst ein geeigneter treibender Parameter gewählt werden. Die Stabilität der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration hängt von den Modenzahlen m und n, der normierten Wellenzahl α, der Stärke $B_{0\varphi} b$ des axialen Magnetfeldes und dem Abstand x_w der ideal leitenden Wand von der Plasmaoberfläche ab. Dabei ist durch $B_{0\varphi} b_c$ die axiale Feldstärke gegeben, bei der der Übergang von stabil nach instabil erfolgt. (Der Wert von b_c wird in Abschnitt 4.3. bestimmt.) Wir setzen daher:

$$\tau := b_c - b \,.$$

Für die Gleichgewichtsgrößen (3.01) ergeben sich hiermit die folgenden Entwicklungskoeffizienten:

$$\begin{aligned}
&\underline{j}_{00} = \frac{2 B_{0\varphi}}{r_0}\,\underline{e}_z \quad , \quad \underline{j}_{0l} = \underline{0} \quad \text{für } l \geq 1 \\
&\underline{B}_{00} = B_{0\varphi}(x\,\underline{e}_\varphi + b_c\,\underline{e}_z) \,, \quad \underline{B}_{01} = -B_{0\varphi}\,\underline{e}_z \,, \quad \underline{B}_{0l} = \underline{0} \quad \text{für } l \geq 2 \\
&\underline{B}^{v}_{00} = B_{0\varphi}(x^{-1}\,\underline{e}_\varphi + b_c\,\underline{e}_z) \,, \quad \underline{B}^{v}_{01} = -B_{0\varphi}\,\underline{e}_z \,, \quad \underline{B}^{v}_{0l} = \underline{0} \quad \text{für } l \geq 2 \\
&p_{00} = B^2_{0\varphi}(1 - x^2) \quad , \quad p_{0l} = 0 \quad \text{für } l \geq 1 \,.
\end{aligned} \tag{4.01}$$

Entsprechend der Wahl des treibenden Parameters sind die Form der ideal leitenden Wand sowie ihr Abstand von der Plasmaoberfläche von τ unabhängig. Dies hat zur Folge, daß in (2.16) und (2.17) $\underline{r}_{o\ell}(u,v)$ und $\underline{n}_{o\ell}(u,v)$ für $\ell \geq 1$ verschwinden. Mit (2.24) bedeutet dies, daß in den Randbedingungen (2.23) $\hat{\underline{\mathfrak{A}}}_\ell$ nicht auftritt:

$$\underline{n}_{oo} \times \underline{\mathfrak{A}}_N = \underline{0} \qquad (N = 0,1,2,\ldots)\,. \tag{4.02}$$

Da weiterhin nach (4.01) die Entwicklungskoeffizienten $\underline{B}^{v}_{o\ell}$ des Gleichgewichtsmagnetfeldes im Vakuum für $\ell \geq 2$ verschwinden, vereinfacht sich auch die Randbedingung (2.22). Man erhält in dem vorliegenden Fall für $N = 0, 1, 2, \ldots$ auf S_o

$$\underline{n}_o \times \underline{\mathfrak{A}}_N = - \underline{n}_o \cdot \underline{\mathfrak{F}}_N \underline{B}^{v}_{oo} - \underline{n}_o \cdot \underline{\mathfrak{F}}_{N-1} \underline{B}^{v}_{o1}\,, \tag{4.03}$$

wobei $\underline{\mathfrak{F}}_{-1}$ definitionsgemäß verschwinden soll.

Die weitere Vorgehensweise: Zunächst ist die marginale Mode $\underline{\mathfrak{F}}_o$, $\underline{\mathfrak{A}}_o$ aus (2.18), (2.19), (2.20), (4.02) und (4.03) unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2.3. gegebenen Änderungen zu bestimmen. Dies wird in den Abschnitten 4.2. und 4.3. geschehen. Das betrachtete Eigenwertproblem hat nur Lösungen für bestimmte Werte von b, die aus der entsprechend Abschnitt 2.3. modifizierten Druckrandbedingung (2.21) erhalten werden können (Abschnitt 4.3.). Nach der Berechnung von $\underline{\mathfrak{F}}_o$, $\underline{\mathfrak{A}}_o$ und b_c können wir in Abschnitt 4.4. den ersten Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 für das Quadrat der Anwachsraten bestimmen. Im weiteren wären sukzessive die Gleichungen höherer Ordnung zu lösen. Wir werden uns allerdings auf die Angabe der zweiten Entwicklungskoeffizienten beschränken.

4.2 Berechnung der Entwicklungskoeffizienten des Vektorpotentials des Vakuumstörmagnetfeldes

Entsprechend unserem Ansatz (3.03) lautet nach (2.14) die Entwicklung für das Vektorpotential

$$\underline{\mathcal{A}}(\underline{r}) = \left(\sum_{l=0} \underline{\mathcal{A}}_l^{m,\kappa} (b_c - \beta)^l \right) \exp(im\varphi + ikz) \,. \qquad (4.04)$$

Die Gleichungen (2.19), (2.20), (4.02) und (4.03) zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten $\underline{\mathcal{A}}_0$ unterscheiden sich nur durch die Randbedingungen von den Gleichungen (2.05), (2.06), (2.08) und (2.09) zur Bestimmung von $\underline{\mathcal{A}}$. Deshalb kann in Analogie zu (3.05) und (3.06) eine Lösung für alle Entwicklungskoeffizienten gefunden werden und man bekommt für l = 0, 1, 2, ..

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{l\beta}^{m,\kappa}(\hat{x},x) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\, F_{lm}(\hat{x},x)\, \underline{f}_{l\nu}^{m,\kappa}\big|_{S_0} \\
\mathcal{A}_{l\varphi}^{m,\kappa}(\hat{x},x) &= \frac{m}{\hat{x}x}\, \mathcal{A}_{l\beta}^{m,\kappa}(\hat{x},x) + \left(i\Psi_l^{m,\kappa}(\hat{x},x)\right)' \\
\mathcal{A}_{l\nu}^{m,\kappa}(\hat{x},x) &= \frac{m}{\hat{x}x}\, \Psi_l^{m,\kappa}(\hat{x},x) - \left(i\,\mathcal{A}_{l\beta}^{m,\kappa}(\hat{x},x)\right)' \qquad (4.05)
\end{aligned}$$

$$\Psi_l^{m,\kappa}(\hat{x},x) = i\,\mathcal{B}_{0\varphi}\, \frac{G_{lm}(\hat{x},x)}{\hat{x}} \left\{ \hat{x}\, \underline{f}_{l-1\nu}^{m,\kappa}\big|_{S_0} + M_c \underline{f}_{l\nu}^{m,\kappa}\big|_{S_0} \right\} ,$$

wobei G und F durch (3.07) und (3.08) gegeben sind, $M_c = m + b_c\hat{x}$ ist, und $\underline{f}_{-1} = 0$ ist.

Insbesondere findet man für die marginale Mode (l = 0):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0\nu}(\underline{r}) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\, \underline{f}_{0\nu}^{m,\kappa}\big|_{S_0} \left\{ F'_{lm}(\hat{x},x) - \frac{M_c}{\hat{x}} \frac{G_{lm}(\hat{x}x)}{\hat{x}x} \right\} \sin(m\varphi + kz) \\
\mathcal{A}_{0\varphi}(\underline{r}) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\, \underline{f}_{0\nu}^{m,\kappa}\big|_{S_0} \left\{ \frac{F_{lm}(\hat{x}x)}{\hat{x}x} - \frac{M_c}{\hat{x}} G'_{lm}(\hat{x}x) \right\} \cos(m\varphi + kz) \qquad (4.06) \\
\mathcal{A}_{0z}(\underline{r}) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\, \underline{f}_{0\nu}^{m,\kappa}\big|_{S_0}\, F_{lm}(\hat{x},x) \cos(m\varphi + kz) \,.
\end{aligned}$$

4.3. Berechnung des marginalen Verschiebungsfeldes

Entsprechend unserem Ansatz (3.02) lautet nach (2.13) die Entwicklung für $\underline{f}$

$$\underline{f}(\underline{r}) = \left(\sum_{\ell=0} \underline{f}_{\ell}^{m,\kappa} \left(b_c - b \right)^{\ell} \right) \exp(im\varphi + ikz) , \tag{4.07}$$

und nach (2.40) hat man für p_1 :

$$p_1(\underline{r}) = \left(\sum_{\ell=0} p_{1\ell}^{m,\kappa} \left(b_c - b \right)^{\ell} \right) \exp(im\varphi + ikz) .$$

Zur Bestimmung des marginalen Verschiebungsfeldes $\underline{f}_0$ ist die entsprechend Abschnitt 2.3. modifizierte Gleichung (2.18), also

$$\left(\nabla \times \underline{B}_{00}\right) \times \left[\nabla \times \left(\underline{f}_0 \times \underline{B}_{00}\right)\right] + \left\{\nabla \times \left[\nabla \times \left(\underline{f}_0 \times \underline{B}_{00}\right)\right]\right\} + \nabla p_{10} = \underline{0} \tag{4.08}$$

zu lösen. Schreibt man die Gleichung (4.08) explizit auf, so erhält man mit den Definitionen (A.1), (A.3) und (A.5) und $M_c = m + b_c \hat{\varkappa}$

$$\frac{r_0}{B_{0\varphi}^2} p_{10}^{m,\kappa\,\cdot} + i M_c \left\{ i M_c f_{0r}^{m,\kappa} - \times f_{0\varphi}^{m,\kappa\,\cdot} - 3 f_{0\varphi}^{m,\kappa} - b_c f_{0z}^{m,\kappa} \right\} = 0 \tag{4.09}$$

$$\frac{r_0}{B_{0\varphi}^2} \frac{im}{\times} p_{10}^{m,\kappa} + i M_c \left\{ 2 f_{0r}^{m,\kappa} + i \hat{\varkappa} b_c f_{0\varphi} - \frac{im}{\times} b_c f_{0z}^{m,\kappa} \right\} = 0 \tag{4.10}$$

$$\frac{r_0}{B_{0\varphi}^2} i \hat{\varkappa} p_{10}^{m,\kappa} + i M_c \left\{ - i \hat{\varkappa} \times f_{0\varphi}^{m,\kappa} + im f_{0z}^{m,\kappa} \right\} = 0 \tag{4.11}$$

Dabei bedeutet hier wie auch stets im folgenden der Punkt die Ableitung nach x.

Im folgenden wird die Größe $p_{10}^{m,\kappa}$ eliminiert. Hierzu multipliziert man die Gleichung (4.10) mit $\hat{\varkappa}\times$, subtrahiert hiervon die mit m

multiplizierte Gleichung (4.11) und eliminiert noch $\underline{F}_{oz}^{m,\kappa}$ mit Hilfe der Beziehung

$$0 = r_0\, div(\underline{F}_0) = \left\{ \frac{1}{x}\left(x F_{or}^{m,\kappa}\right)' + \frac{im}{x} F_{o\varphi}^{m,\kappa} + i\hat{\varkappa} F_{oz}^{m,\kappa} \right\} exp(im\varphi + kz) .$$

Dies liefert:

$$m\left(x F_{or}^{m,\kappa}\right)' + \frac{2(\hat{\varkappa}x)^2}{M_e} F_{or}^{m,\kappa} + i\left[(\hat{\varkappa}x)^2 + m^2\right] F_{o\varphi}^{m,\kappa} = 0 \quad . \tag{4.12}$$

Des weiteren erhält man durch Einsetzen der mit (ix/m) multiplizierten und nach x differenzierten Gleichung (4.10) in die Gleichung (4.09)

$$2\left(x F_{or}^{m,\kappa}\right)' + m M_e F_{or}^{m,\kappa} + i\left[M_e\left(x F_{o\varphi}^{m,\kappa}\right)' + 2\, m F_{o\varphi}^{m,\kappa}\right] = 0 \quad . \tag{4.13}$$

Definiert man

$$\phi := m F_{or}^{m,\kappa} \tag{4.14}$$

$$\chi := \beta_0 F_{or}^{m,\kappa} + i F_{o\varphi}^{m,\kappa} \tag{4.15}$$

$$\beta_0 := 2/M_c \quad , \tag{4.16}$$

so lassen sich (4.12) und (4.13) schreiben als

$$(x\phi)' + \left[m^2 + (\hat{\varkappa}x)^2\right]\chi - m\beta_0\phi = 0 \tag{4.17}$$

$$(x\chi)' + (1-\beta_0^2)\,\phi + m\beta_0\chi = 0 \quad . \tag{4.18}$$

Setzt man nun (4.18) in (4.17) ein, so findet man

$$\left[x(x\chi)'\right]' + \left[(\beta_0^2 - 1)\left(m^2 + (\hat{\varkappa}x)^2\right) - m^2\beta_0^2\right]\chi = 0 \quad . \tag{4.19}$$

Da für das betrachtete Problem nur Lösungen von Interesse sind, die im Plasma beschränkt bleiben, findet man mit

$$Y_0(x) := (\beta_0^2 - 1)^{1/2}\,\hat{\varkappa}x \tag{4.19a}$$

als Lösung von (4.19)

$$\chi = \frac{\bar{C}_0}{\hat{\varkappa} x} J_{|m|}(Y_0) \tag{4.20}$$

und durch Einsetzen dieser Lösung in (4.18)

$$\phi = \bar{C}_0 \frac{J'_{|m|}(Y_0) + m\beta_0 J_{|m|}(Y_0)/Y_0}{(\beta_0^2 - 1)^{1/2}} \quad . \tag{4.21}$$

Benutzt man die Definitionen (4.14) und (4.15) und beachtet, daß wegen div$\underline{\xi}_0$ = 0 aus der Gleichung (4.12) folgt

$$i m \xi_{0z}^{m,k} = \hat{\varkappa} x \left(\beta_0 \xi_{0r}^{m,k} + i \xi_{0\varphi}^{m,k} \right) = \hat{\varkappa} x \chi \quad , \tag{4.22}$$

so erhält man schließlich

$$\xi_{0r}^{m,k}(Y_0) = C_0 \left\{ J'_{|m|}(Y_0) + m\beta_0 J_{|m|}(Y_0)/Y_0 \right\} \tag{4.23}$$

$$\xi_{0\varphi}^{m,k}(Y_0) = i C_0 \left\{ \beta_0 J'_{|m|}(Y_0) + m J_{|m|}(Y_0)/Y_0 \right\} \tag{4.24}$$

$$\xi_{0z}^{m,k}(Y_0) = -i C_0 \left(\beta_0^2 - 1 \right)^{1/2} J_{|m|}(Y_0) \quad . \tag{4.25}$$

Mit (4.02) - (4.05) läßt sich die marginale Mode $\underline{\xi}_0$ jetzt in folgender Form schreiben

$$\begin{aligned} \xi_{0r}(\underline{r}) &= \xi_{0r}^{m,k}(Y_0) \cos(m\varphi + kz) \\ \xi_{0\varphi}(\underline{r}) &= i \xi_{0\varphi}^{m,k}(Y_0) \sin(m\varphi + kz) \\ \xi_{0z}(\underline{r}) &= i \xi_{0z}^{m,k}(Y_0) \sin(m\varphi + kz) \quad . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Wir halten an dieser Stelle noch fest, daß die marginale Mode $\underline{\xi}_0$, $\underline{\sigma}_0$, die für ein inkompressibles Plasma erhalten wurde, mit der marginalen Mode übereinstimmt, die man im Fall eines kompressiblen Plasmas erhält. In Abschnitt 7.2., in dem wir hiervon Gebrauch machen werden, wird dies explizit gezeigt werden.

4.4. Bestimmung des kritischen Wertes b_c des treibenden Parameters

Die Lösung (4.26), (4.06) für die marginale Mode wurde erhalten, ohne von der gemäß Abschnitt 2.3. modifizierten Druckrandbedinung

$$\underline{B}_{00}\cdot\left(\underline{B}_{10}(\underline{f}_0)+[\underline{f}_0\cdot\nabla]\underline{B}_{00}\right)-\underline{B}^{v}_{00}\cdot\left([\underline{f}_0\cdot\nabla]\underline{B}^{v}_{00}\right)$$
$$-\underline{B}^{v}_{00}\cdot[\nabla\times\underline{\Omega}_0]+p_{10}+\underline{f}_0\cdot\nabla p_{00}=0 \qquad \text{auf } S_{00} \tag{4.27}$$

Gebrauch zu machen. Wir werden jetzt sehen, daß diese Randbedingung den noch unbestimmten Wert b_c des treibenden Parameters b liefert.

Die Randbedingung (4.27) ergibt mit (4.07) und (4.26) unter Berücksichtigung von $\operatorname{div}\underline{f}_0 = 0$ und nach Elimination von p_{10} mit Hilfe der Gleichung (4.11) nach längerer Rechnung:

$$-G_{|m|}(\hat{x},1)\,F^{m,\mu}_{0r}\big|_{S_0} = i\,F^{m,\mu}_{0t}\big|_{S_0}\,, \tag{4.28}$$

das heißt, nach Einsetzen von (4.23) und (4.25) für $y_0(1)$ die Gleichung

$$\frac{Y_0\,J'_{|m|}(Y_0)}{m\,J_{|m|}(Y_0)}+|\hat{x}|^{-1}\left\{\frac{m}{|m|}\left(Y_0^2+\hat{x}^2\right)^{1/2}+\left(m\,G_{|m|}(\hat{x},1)\right)^{-1}Y_0^2\right\}=0\,. \tag{4.29}$$

Diese Gleichung kann deshalb befriedigt werden, weil $y_0(1)$ durch die noch bestehende Abhängigkeit von b_c und $\hat{x}$

$$Y_0(1)=\left(4/M_c^2-1\right)^{1/2}\hat{x}$$

noch variabel ist.
Löst man die letzte Beziehung nach b_c auf, so findet man:

$$b_c = b_c(m,n,\varkappa,x_w) = \frac{2\,m\cdot n}{|m\cdot n|\left(\bar{y}_o^2 + [n\varkappa]^2\right)^{1/2}} - \frac{m}{n}\,\varkappa^{-1} \quad , \qquad (4.30)$$

wobei $\bar{y}_o$ Lösung der Gleichung (4.29) ist.

4.5. Berechnung des ersten Entwicklungskoeffizienten der Anwachsraten

Mit der Angabe von b_c ist die Lösung des linearen, entsprechend Abschnitt 2.3. modifizierten Eigenmodenproblems (2.18) - (2.23) in niedrigster Ordnung vollständig bekannt, und es kann jetzt mit (2.39) der erste Entwicklungskoeffizient γ_1^2 für die Anwachsraten bestimmt werden. Die Gleichung (2.39), die für den Fall kompressibler Plasmen abgeleitet worden war, ist ohne Änderungen auch im vorliegenden inkompressiblen Fall benutzbar. Denn im kompressiblen Fall folgt aus der Gleichung zur Bestimmung der marginalen Mode $\underline{F}_{00}(\underline{f}_0) = 0$ für die von uns betrachteten Störungen (4.07) und das von uns betrachtete Gleichgewicht (3.01) $\operatorname{div}\underline{f}_0 = 0$. Dies wird in wird in Abschnitt 7.2. noch explizit gezeigt werden.

Da der Abstand der ideal leitenden Wand von der Plasmaoberfläche und die Form der Wand nicht von dem treibenden Parameter abhängt, verschwindet in (2.39) das Oberflächenintegral über die ideal leitende Wand, und man erhält:

$$-\gamma_1^2 \varrho_0(\underline{f}_0, \underline{f}_0) = 2 W_1^{Pl}[\underline{f}_0, \underline{f}_0] + 2\int_{S_\infty} (\underline{n}_0 \cdot \underline{f}_0)(\underline{B}_{01}^{\nu} \cdot [\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_0])\, d\sigma \quad , \tag{4.31}$$

da mit (2.33)

$$2 W_1^{S_\infty}[\underline{f}_0, \underline{f}_0] = \int_{S_\infty} (\underline{n}_0 \cdot \underline{f}_0)^2 (\underline{n}_0 \cdot \nabla)[\underline{B}_{00}^{\nu} \cdot \underline{B}_{01}^{\nu} - \underline{B}_{00} \cdot \underline{B}_{01} - p_{01}]\, d\sigma$$

$$= -\int_{S_\infty} (\underline{n}_0 \cdot \underline{f}_0)^2 [\underline{n}_0 \cdot \nabla][B_{0\varphi}^2 b_c - B_{0\varphi}^2 b_c]\, d\sigma = 0$$

ist. Entsprechend der Definition (2.32) ist

$$2 W_1^{Pl}[\underline{f}_0, \underline{f}_0] = \int_{Pl} \{ \underline{j}_{00} \cdot [\underline{f}_0 \times (\nabla \times (\underline{f}_0 \times \underline{B}_{01}))] + 2[\nabla \times (\underline{f}_0 \times \underline{B}_{00})] \cdot [\nabla \times (\underline{f}_0 \times \underline{B}_{01})] \}\, dV \quad ,$$

und man erhält

$$\int_{Pl} \left\{ \underline{j}_{oo} \times \left[\underline{F}_o \bullet \left(\nabla \times \left(\underline{F}_o \times \underline{B}_{o1} \right) \right) \right] \right\} dV = 4\pi L \hat{\varkappa} B_{o\varphi}^2 \int_0^1 i F_{o\varphi}^{m,\kappa} F_{o\nu}^{m,\kappa} \varkappa \, dx$$

und

$$\int_{Pl} 2 \left[\nabla \times \left(\underline{F}_o \times \underline{B}_{oo} \right) \right] \cdot \left[\nabla \times \left(\underline{F}_o \times \underline{B}_{o1} \right) \right] dV = 2\pi L \hat{\varkappa} \left(M_c / m \right) B_{o\varphi}^2 \int_0^1 \left\{ \left(F_{o\nu}^{m,\kappa} \right)^2 + \left(i F_{o\varphi}^{m,\kappa} \right)^2 + \left(i F_{oz}^{m,\kappa} \right)^2 \right\} \varkappa \, dx \, .$$

Weiterhin ist

$$\int_{Pl} \underline{F}_o \cdot \underline{F}_o \, dV = r_o^2 \pi L / m \int_0^1 \left\{ \left(F_{o\nu}^{m,\kappa} \right)^2 + \left(i F_{o\varphi}^{m,\kappa} \right)^2 + \left(i F_{oz}^{m,\kappa} \right)^2 \right\} \varkappa \, dx \, ,$$

und für das Oberflächenintegral in (4.31) erhält man

$$2 \int_{S_{oo}} \left(\underline{n}_o \cdot \underline{F}_o \right) \left(\underline{B}_{o1}^{\nu} \cdot \left[\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_o \right] \right) d\sigma = - 2\pi L \left(M_c / m \right) G_{1m1}(\hat{\varkappa}, 1) B_{o\varphi}^2 \left(F_{o\nu}^{m,\kappa} \Big|_{S_{oo}} \right)^2 .$$

Nach (2.39) läßt sich der erste Entwicklungskoeffizient jetzt schreiben als

$$\gamma_1^2 = - \frac{B_{o\varphi}^2}{\rho_o r_o^2} 2 \hat{\varkappa} M_c \left\{ 1 + \frac{\frac{2m}{M_c} \int_0^1 i F_{o\varphi}^{m,\kappa} F_{o\nu}^{m,\kappa} \varkappa \, dx + \frac{G_{1m1}(\hat{\varkappa}, 1)}{\hat{\varkappa}} \left(F_{o\nu}^{m,\kappa} \Big|_{S_o} \right)^2}{\int_0^1 \left[\left(F_{o\nu}^{m,\kappa} \right)^2 + \left(i F_{o\varphi}^{m,\kappa} \right)^2 + \left(i F_{oz}^{m,\kappa} \right)^2 \right] \varkappa \, dx} \right\} \quad (4.32)$$

4.6. Bestimmung von $\underline{f}_1$

Zur Bestimmung von $\underline{f}_1$ ist gemäß (2.18) und (2.21) das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\underline{\underline{F}}_{00}(\underline{f}_1) = -\left\{-\gamma_1^2\,\underline{f}_0 + \underline{\underline{F}}_{01}(\underline{f}_0)\right\}, \tag{4.33}$$

das mit den Modifikationen entsprechend Abschnitt 2.3. und (A.1), (A.3) und (A.5) lautet

$$(\nabla\times\underline{B}_{00})\times[\nabla\times(\underline{f}_1\times\underline{B}_{00})] + \left\{\nabla\times\left[\nabla\times(\underline{f}_1\times\underline{B}_{00})\right]\right\}\times\underline{B}_{00} + \nabla p_{11} =$$

$$= -\left\{-\gamma_1^2\underline{f}_0 + (\nabla\times\underline{B}_{00})\times[\nabla\times(\underline{f}_0\times\underline{B}_{01})] + \left\{\nabla\times[\nabla\times(\underline{f}_0\times\underline{B}_{00})]\right\}\times\underline{B}_{01} + \left\{\nabla\times\left[\nabla\times(\underline{f}_0\times\underline{B}_{01})\right]\right\}\times\underline{B}_{00}\right.,$$

mit der Randbedingung

$$\begin{aligned}
&\underline{B}_{00}\cdot\left[\underline{\underline{B}}_{10}(\underline{f}_1) + (\underline{f}_1\cdot\nabla)\underline{B}_{00}\right] - \underline{B}^{\vee}_{00}\cdot\left[\nabla\times\underline{\alpha}_1 + (\underline{f}_1\cdot\nabla)\underline{B}^{\vee}_{00}\right] + \\
&\underline{B}_{01}\cdot\left[\underline{\underline{B}}_{10}(\underline{f}_0) + (\underline{f}_0\cdot\nabla)\underline{B}_{00}\right] - \underline{B}^{\vee}_{01}\cdot\left[\nabla\times\underline{\alpha}_0 + (\underline{f}_0\cdot\nabla)\underline{B}^{\vee}_{00}\right] + \\
&\underline{B}_{00}\cdot\left[\underline{\underline{B}}_{11}(\underline{f}_0) + (\underline{f}_0\cdot\nabla)\underline{B}_{01}\right] - \underline{B}^{\vee}_{00}\cdot\left[(\underline{f}_0\cdot\nabla)\underline{B}^{\vee}_{01}\right] + p_{11} - \underline{f}_1\cdot\nabla p_{00} = 0 \quad \text{auf } S_0\,.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

zu lösen. Eine Lösung der homogenen Gleichung (4.33) ist mit der marginalen Mode $\underline{f}_0$ bekannt. Zu bestimmen bleibt also noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, die mit (4.07) explizit lautet

$$\begin{aligned}
&\frac{r_0}{B_{0\varphi}^2}\,p_{11}^{m,\kappa\,\bullet} + i\,M_c\left\{i\,M_c\,\underline{f}_{1r}^{m,\kappa} - \kappa\,\underline{f}_{1\varphi}^{m,\kappa\,\bullet} - 3\,\underline{f}_{1\varphi}^{m,\kappa} - \ell_c\,\underline{f}_{1z}^{m,\kappa}\right\} = \\
&\quad -\left\{-\hat{\gamma}_1^2\,\underline{f}_{0r}^{m,\kappa} + i\,(M_c+n\,q_c)(i\,\hat{\varkappa}\,\underline{f}_{0r}^{m,\kappa} - \underline{f}_{0z}^{m,\kappa}) + i\,\hat{\varkappa}\,(2\,\underline{f}_{0\varphi}^{m,\kappa} + [\kappa\,\underline{f}_{0\varphi}^{m,\kappa}]' - i\,m\,\underline{f}_{0r}^{m,\kappa})\right\}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{r_0}{B_{0\varphi}^2}\,\frac{i\,m}{\kappa}\,p_{11}^{m,\kappa} + i\,M_c\left\{2\,\underline{f}_{1r}^{m,\kappa} + i\,q_c\,\underline{f}_{1\varphi}^{m,\kappa} - \frac{i\,m}{\kappa}\,\ell_c\,\underline{f}_{1z}^{m,\kappa}\right\} = \\
&\quad -\left\{-\hat{\gamma}_1^2\,\underline{f}_{0\varphi}^{m,\kappa} + i\,(M_c+n\,q_c)(i\,\hat{\varkappa}\,\underline{f}_{0\varphi}^{m,\kappa} - \frac{i\,m}{\kappa}\,\underline{f}_{0z}^{m,\kappa}) + 2\,i\,\hat{\varkappa}\,\underline{f}_{0r}^{m,\kappa}\right\}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{r_0}{B_{0\varphi}^2}\,i\,\hat{\varkappa}\,p_{11}^{m,\kappa} + i\,M_c\left\{-i\,\hat{\varkappa}\,\kappa\,\underline{f}_{1\varphi}^{m,\kappa} + i\,m\,\underline{f}_{1z}^{m,\kappa}\right\} = \\
&\quad -\left\{-\hat{\gamma}_1^2\,\underline{f}_{0z}^{m,\kappa} + i\,\hat{\varkappa}\,\kappa\left(\frac{i\,m}{\kappa}\,\underline{f}_{0z}^{m,\kappa} - i\,\hat{\varkappa}\,\underline{f}_{0\varphi}^{m,\kappa}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

mit

$$\hat{\gamma}_\lambda := \gamma_\lambda^2 / \varrho_0 \quad , \quad \varrho_c = \ell_c \varkappa \ .$$

Da die nachfolgenden Rechnungen langwierig aber elementar sind, soll nur der Gang der Rechnung skizziert werden. Multiplziert man Gleichung (4.35) mit $\hat{\varkappa} x$ und subtrahiert hiervon die mit m multiplizierte Gleichung (4.37), eliminiert dann $\underline{f}_{\lambda 2}^{m,\kappa}$ mit Hilfe der Beziehung $\operatorname{div} \underline{f}_\lambda = 0$, multipliziert mit $-i \hat{\varkappa} x / M_c^2$ und benutzt die Gleichung (4.12), so findet man

$$m (x f_{\lambda r}^{m,\kappa})^{\cdot} + 2 M_c^{-1} (\hat{\varkappa} x)^2 f_{\lambda r}^{m,\kappa} + i [(\hat{\varkappa} x)^2 + m^2] f_{\lambda \varphi}^{m,\kappa} = 2 [\hat{\varkappa} M_c + \hat{\gamma}_\lambda^2] M_c^{-3} (\hat{\varkappa} x)^2 f_{o r}^{m,\kappa} \ . \tag{4.38}$$

Multipliziert man Gleichung (4.36) mit -ix/m, differenziert nach x, setzt dann in die Gleichung (4.35) ein, multipliziert mit m, benutzt die Gleichung (4.13) und $\operatorname{div} \underline{f}_\lambda = 0$, so erhält man

$$2 (x f_{\lambda r}^{m,\kappa})^{\cdot} + m M_c f_{\lambda r}^{m,\kappa} + i M_c (x f_{\lambda \varphi}^{m,\kappa})^{\cdot} + 2 i m f_{\lambda \varphi}^{m,\kappa} = -2 [\hat{\varkappa} M_c + \hat{\gamma}_\lambda^2] M_c^{-2} \hat{\varkappa} x \, i f_{o z}^{m,\kappa} \ . \tag{4.39}$$

Definiert man (analog zu (4.14) und (4.15))

$$\phi^\lambda := m f_{\lambda r}^{m,\kappa} \tag{4.40}$$

$$\chi^\lambda := \beta_0 f_{\lambda r}^{m,\kappa} + i f_{\lambda \varphi}^{m,\kappa} \tag{4.41}$$

und definiert ferner

$$\beta_\lambda := -2 (\hat{\gamma}_\lambda^2 + \hat{\varkappa} M_c) M_c^{-3} \ , \tag{4.42}$$

so erhält man mit (4.38) und (4.39) die beiden Gleichungen

$$(x \phi^\lambda)^{\cdot} + [m^2 + (\hat{\varkappa} x)^2] \chi^\lambda - m \beta_0 \phi^\lambda = -\beta_\lambda (\hat{\varkappa} x)^2 f_{o r}^{m,\kappa} \tag{4.43}$$

$$(x \chi^\lambda)^{\cdot} + (\lambda - \beta_0^2) \phi^\lambda + m \beta_0 \chi^\lambda = \beta_\lambda \hat{\varkappa} x \, i f_{o z}^{m,\kappa} \ . \tag{4.44}$$

Setzt man (4.44) in (4.43) ein, so erhält man

$$[x(x\chi^{1})']' + [(\beta_0^2-1)(m^2+(\hat{\varkappa}x)^2) - m^2\beta_0^2]\chi^{1} = \beta_1\left[(1-\beta_0^2)(\hat{\varkappa}x)^2 \Gamma_{0r}^{m,K} + \hat{\varkappa}(x^2 i\Gamma_{0z}^{m,K})' - m\beta_0\hat{\varkappa}x\, i\Gamma_{0z}^{m,K}\right] \quad (4.45)$$

oder unter Benutzung der schon früher eingeführten Variablen

$$\chi_0(x) = (\beta_0^2-1)^{1/2}\hat{\varkappa}x \quad (4.45a)$$

$$\frac{d}{dY_0}\left[Y_0\frac{d}{dY_0}(Y_0\chi^{1})\right] + (Y_0^2-m^2)\chi^{1} = -2\beta_1 C_0 (m\beta_0-1) Y_0 \gamma_{1m1}(Y_0) \quad (4.46)$$

Da die reguläre Lösung der zu (4.46) gehörigen homogenen Gleichung durch

$$\chi^{1}_{hom}(Y_0) = \bar{C}_1 \frac{\gamma_{1m1}(Y_0)}{Y_0}$$

gegeben ist, sieht man leicht, daß mit

$$\chi^{1}_{inhom}(Y_0) \sim \gamma'_{1m1}(Y_0)$$

eine im Plasma beschränkte, spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten werden kann. Genauer findet man

$$\chi^{1}_{inhom}(Y_0) = C_0\beta_1(m\beta_0-1)\gamma'_{1m1}(Y_0) \quad (4.47)$$

woraus folgt

$$\phi^{1}_{inhom}(Y_0) = \frac{\beta_1 m\beta_0}{\beta_0^2-1} C_0\left[(m\beta_0-1)\gamma'_{1m1}(Y_0) + \left(\frac{m\beta_0-1}{\beta_0} - Y_0^2\right)\frac{\gamma_{1m1}(Y_0)}{Y_0}\right] \quad (4.48)$$

Aus (4.47), (4.48), (4.40), (4.41) und der (4.23) - (4.25) entsprechenden homogenen Lösung findet man schließlich

$$\Gamma_{1r}^{m,K}(Y_0) = C_1\left\{\gamma'_{1m1}(Y_0) + m\beta_0\gamma_{1m1}(Y_0)/Y_0\right\} + C_0 m\beta_0\beta_1\left\{(m\beta_0-1)\gamma'_{1m1}(Y_0) + \left(\frac{m^2\beta_0-m}{\beta_0} - Y_0^2\right)\gamma_{1m1}(Y_0)/(Y_0)\right\} \quad (4.49)$$

$$\Gamma_{1\varphi}^{m,K}(Y_0) = iC_1\left\{\beta_0\gamma'_{1m1}(Y_0) + m\gamma_{1m1}(Y_0)/Y_0\right\} + iC_0 m\beta_0\beta_1\left\{\frac{m\beta_0-1}{\beta_0}\gamma'_{1m1}(Y_0) + \beta_0\left(\frac{m^2\beta_0-m}{\beta_0} - Y_0^2\right)\gamma_{1m1}(Y_0)/Y_0\right\} \quad (4.50)$$

$$\Gamma_{1z}^{m,K}(Y_0) = -i(\beta_0^2-1)^{1/2}\left\{C_1\gamma_{1m1}(Y_0) + m\beta_0\beta_1 C_0\left[Y_0\gamma'_{1m1}(Y_0) + \gamma_{1m1}(Y_0)\right]\right\} \quad (4.51)$$

Geht man mit dieser Lösung in die Randbedingung (4.34) ein, so findet man $C_4 = 0$.

4.7. Bestimmung von γ_2^2

Es läßt sich zeigen, daß für den Fall des von uns betrachteten Gleichgewichts (3.01) und für Störungen der Form (4.07) formal die Gleichung (2.38) (für N = 2) zur Berechnung des zweiten Entwicklungskoeffizienten γ_2^2 benutzt werden kann, obwohl diese für den Fall kompressibler Plasmen hergeleitet wurde. Dabei geht wesentlich ein, daß die Entwicklungskoeffizienten $p_{o\ell}$ für $\ell \geq 1$ verschwinden.

Wir benutzen also formal Gleichung (2.38) für N = 2. Da auch hier wieder (wie schon in Abschnitt 4.5.) das Oberflächenintegral über τ_{oo} nicht auftritt, erhält man:

$$-\gamma_2^2 \rho_0(\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_0) = +\gamma_1^2 \rho_0(\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1) + 2W_1^{Pl}[\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1] + 2W_2^{Pl}[\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_0] + \int_{S_0} [(\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_0)\underline{B}_{01}^{v} \cdot (\nabla \times \underline{a}_1) + (\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_1)\underline{B}_{01}^{v} \cdot (\nabla \times \underline{a}_0)] d\sigma \quad . \tag{4.52}$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß ein weiteres Integral über S_0 wegen $\underline{B}_{02}^{v} = 0$ verschwindet. Nach Gleichung (2.33) und (4.01) gilt weiterhin (wegen $p_{o\ell} = 0$ für $\ell \geq 0$)

$$2W_1^{S_0}[\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1] = \int_{S_0} (\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_0)(\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_1)(\underline{n}_0 \cdot \nabla)\left[\underline{B}_{00}^{v} \cdot \underline{B}_{01}^{v} - \underline{B}_{00} \cdot \underline{B}_{01} - p_{01}\right] d\sigma$$

$$= -\int_{S_0} (\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_0)(\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_1)(\underline{n}_0 \cdot \nabla)\left\{B_{0\varphi}^2 b_\varepsilon - B_{0\varphi}^2 b_\varepsilon\right\} d\sigma = 0$$

und

$$2W_2^{S_0}[\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_0] = \int_{S_0} (\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_0)^2 (\underline{n}_0 \nabla)\left[\underline{B}_{00}^{v} \underline{B}_{02}^{v} + \frac{B_{01}^{v2}}{2} - \underline{B}_{00} \underline{B}_{02} - \frac{B_{01}^2}{2} - p_{02}\right] d\sigma$$

$$= \int_{S_0} (\underline{n}_0 \cdot \underline{\xi}_0)^2 (\underline{n}_0 \cdot \nabla)\left\{\frac{1}{2} B_{0\varphi}^2 - \frac{1}{2} B_{0\varphi}^2\right\} d\sigma = 0 \quad .$$

In Gleichung (4.52) gilt nun nach (2.32)

$$2W_1^{Pl}[\underline{\xi}_0, \underline{\xi}_1] = \int_{Pl} \left\{ j_{00} \bullet [\underline{\xi}_0 \times \underline{B}_{11}(\underline{\xi}_1)] + \underline{B}_{10}(\underline{\xi}_1) \cdot \underline{B}_{11}(\underline{\xi}_0) + \underline{B}_{10}(\underline{\xi}_0)\, \underline{B}_{11}(\underline{\xi}_1) \right\} dV$$

$$= 2\pi \hat{x} L m^{-1} B_{0\varphi}^2 \int_0^1 \left(\xi_{1r}^{m,k} \cdot i\xi_{0\varphi}^{m,k} + \xi_{0r}^{m,k} \cdot i\xi_{1\varphi}^{m,k} \right) x\, dx +$$

$$+ 2\pi \hat{\varkappa} L m^{-1} B_{0\varphi}^2 M_c \langle \underline{f}_0^{m,\kappa}, \underline{f}_1^{m,\kappa} \rangle$$

mit

$$\langle \underline{f}_i^{m,\kappa}, \underline{f}_j^{m,\kappa} \rangle := \int_0^1 \{ f_{ir}^{m,\kappa} f_{jr}^{m,\kappa} + i f_{i\varphi}^{m,\kappa} i f_{j\varphi}^{m,\kappa} + i f_{iz}^{m,\kappa} i f_{jz}^{m,\kappa} \} \times dx \ ,$$

$$2 W_2^{Pl}[\underline{f}_0, \underline{f}_0] = \int_{Pl} \underline{B}_{11}(\underline{f}_0) \cdot \underline{B}_{11}(\underline{f}_0) \, dV$$

$$= \pi \hat{\varkappa}^2 L m^{-1} B_{0\varphi}^2 \langle \underline{f}_0^{m,\kappa}, \underline{f}_0^{m,\kappa} \rangle \ ,$$

$$\rho_0(\underline{f}_0, \underline{f}_1) = \rho_0 \pi L m^{-1} r_0^2 \langle \underline{f}_0^{m,\kappa}, \underline{f}_1^{m,\kappa} \rangle$$

und

$$\rho_0(\underline{f}_0, \underline{f}_0) = \rho_0 \pi L m^{-1} r_0^2 \langle \underline{f}_0^{m,\kappa}, \underline{f}_0^{m,\kappa} \rangle \ .$$

Für das Oberflächenintegral in (4.52) erhält man mit (4.05)

$$\int_{S_0} \{ (\underline{n}_0 \cdot \underline{f}_0) \underline{B}_{01}^{v} \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_1) + (\underline{n}_0 \cdot \underline{f}_1) \underline{B}_{01}^{v} \cdot (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}_0) \} \, d\sigma =$$

$$- \pi L m^{-1} B_{0\varphi}^2 M_c G_{1m1}(\hat{\varkappa}, 1) \{ 2 f_{1r}^{m,\kappa}|_{S_0} + \hat{\varkappa} M_c^{-1} f_{0r}^{m,\kappa}|_{S_0} \} f_{0r}^{m,\kappa}|_{S_0} \ .$$

Damit läßt sich abschließend der zweite Entwicklungskoeffizient für die Anwachsraten schreiben als

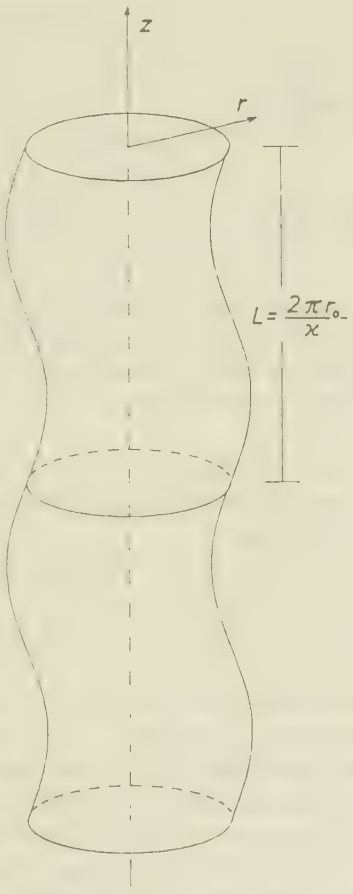
$$\gamma_2^2 = \Big[- \hat{\varkappa}^2 \langle \underline{f}_0^{m,\kappa}, \underline{f}_0^{m,\kappa} \rangle - (2\hat{\varkappa} M_c + \gamma_1^2) \langle \underline{f}_0^{m,\kappa}, \underline{f}_1^{m,\kappa} \rangle -$$

$$- 2\hat{\varkappa} \int_0^1 (f_{0r}^{m,\kappa} i f_{1\varphi}^{m,\kappa} + f_{1r}^{m,\kappa} i f_{0\varphi}^{m,\kappa}) \times dx + \qquad (4.53)$$

$$+ G_{1m1}(\hat{\varkappa}, 1) f_{0r}^{m,\kappa}|_{S_0} \{ 2 M_c f_{1r}^{m,\kappa}|_{S_0} + \hat{\varkappa} f_{0r}^{m,\kappa}|_{S_0} \} \Big] \frac{B_{0\varphi}^2}{\rho_0 r_0^2} \ .$$

4.8. Diskussion der Ergebnisse der linearen Theorie für den inkompressiblen z-Pinch

Im folgenden wollen wir die im Rahmen der linearen Theorie erhaltenen Ergebnisse aus Kapitel 3. und 4.1. - 4.7. diskutieren. Unser Interesse gilt dabei den "Kink - Moden", die in einem - unserer zylindrischen Plasmakonfiguration verwandten - Tokamak die gefährlichsten idealen MHD - Moden /2/ sind.
Kink - Moden erhielt man für $m \neq 0$ und $n \neq 0$. Sie bewirken eine "korkenzieherartige" Verformung des Plasmas (siehe nebenstehende Abbildung).
Weiter werden wir uns auf die Betrachtung des Falls $|m| = 1$ beschränken. Dies kann als der gefährlichste Fall angesehen werden, da Moden mit $|m| \geq 2$ durch realistischere Stromprofile stabilisiert werden können /14/.
Wegen $q = \frac{z}{R} b$ kann man statt b auch q als treibenden Parameter betrachten. Für die Diskussion werden wir den gebräuchlicheren Parameter q benutzen.
Wertet man für $|m| = 1$ die Gleichungen (3.09) und (3.10) aus, so findet man von großem $|q|$ herkommend den Einsatz der Instabilität bei $|q| = 1/|n|$ ($\Omega^2 = 0$ für $q = -m/n$ nach Gl.(3.10)).



Das bedeutet, daß der betragsmäßig größte Wert des Sicherheitsfaktors, für den Instabilität auftritt, gerade für $|n| = 1$ angenommen wird. Damit ist klar, daß die Kink - Moden mit $|m| = |n| = 1$ den interessantesten Fall darstellen.

Betrachtet man die Gleichung (3.09), so findet man, daß ihre Lösung $\bar{y}$ wegen $M_c = m + n\, q_c$ die Abhängigkeit

$$\bar{y} = \bar{y}(\varkappa, x_w, q, m, n) \tag{4.54}$$

besitzt. Man überzeugt sich leicht, daß $\bar{y}$ die Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned} \bar{y}(\varkappa, x_w, q, m, n) &= \bar{y}(\varkappa, x_w, q, -m, -n) \\ &= \bar{y}(\varkappa, x_w, -q, -m, n) \\ &= \bar{y}(\varkappa, x_w, -q, m, -n) \end{aligned} \tag{4.55}$$

besitzt. Aus Gleichung (3.10) erkennt man, daß $\Omega^2(\varkappa, x_w, q, m, n)$ genau die selben Symmetrieeigenschaften hat. Damit können wir uns für alle folgenden Betrachtungen auf die $m = n = 1$ Kink - Mode beschränken.

Der Gleichung (3.10) entnimmt man, daß für die $m = n = 1$ Kink - Mode Ω^2 verschwindet, entweder wenn $q = q_{c2}$ eine Lösung der Gleichung

$$1 + q = 2\varkappa \{\bar{y}^2 + \varkappa^2\}^{-1/2} \tag{4.56}$$

ist, oder wenn

$$q = q_{c1} = -1 \tag{4.57}$$

ist.

Dies bedeutet, daß die $m = n = 1$ Kink - Mode zwei Stabilitätsgrenzen besitzt. q_{c2} hängt dabei von $\varkappa$ und x_w ab, wogegen q_{c1} unabhängig von allen Parametern ist. Die explizite Auswertung von $q_{c2}(\varkappa, x_w^{-1})$ ist in der Abbildung 3 wiedergegeben. $\varkappa = 2\pi r_o/L \geq 0$ ist das inverse Aspektverhältnis (siehe hierzu auch den letzten Abschnitt von Kapitel 4.8.). Interpretiert man den Zylinder als topologischen Torus, so sind nur $\varkappa$ - Werte aus dem

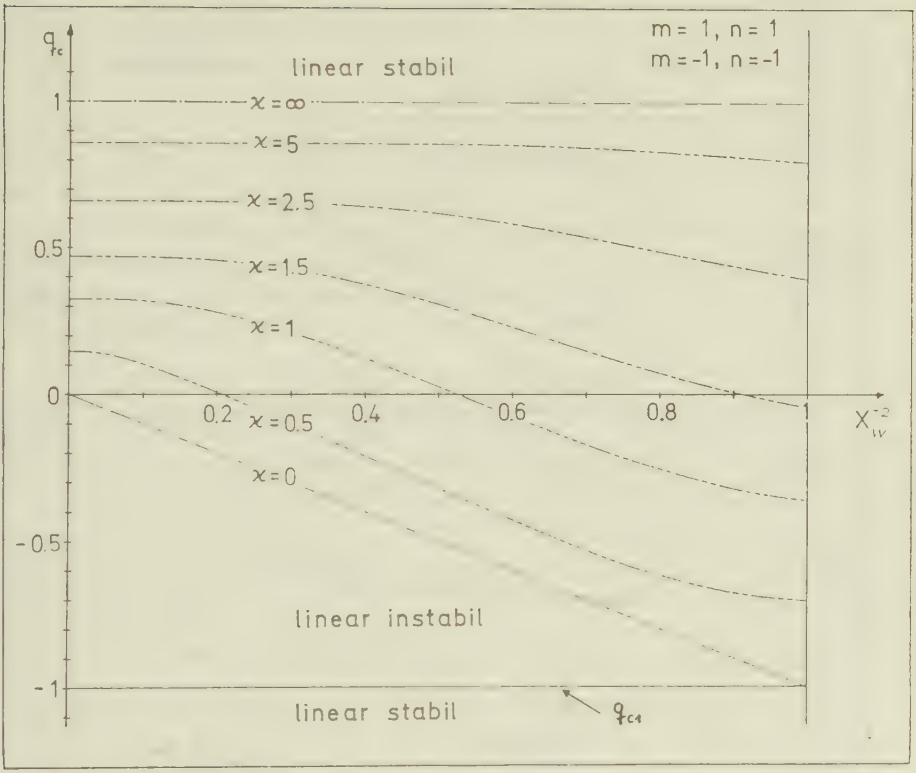


Abb.3: Stabilitätsgrenzen $q = q_{c1} = -1$ und $q = q_{c2}(\varkappa, \chi_{iv}^{-2})$ für verschiedene Werte von $\varkappa$.

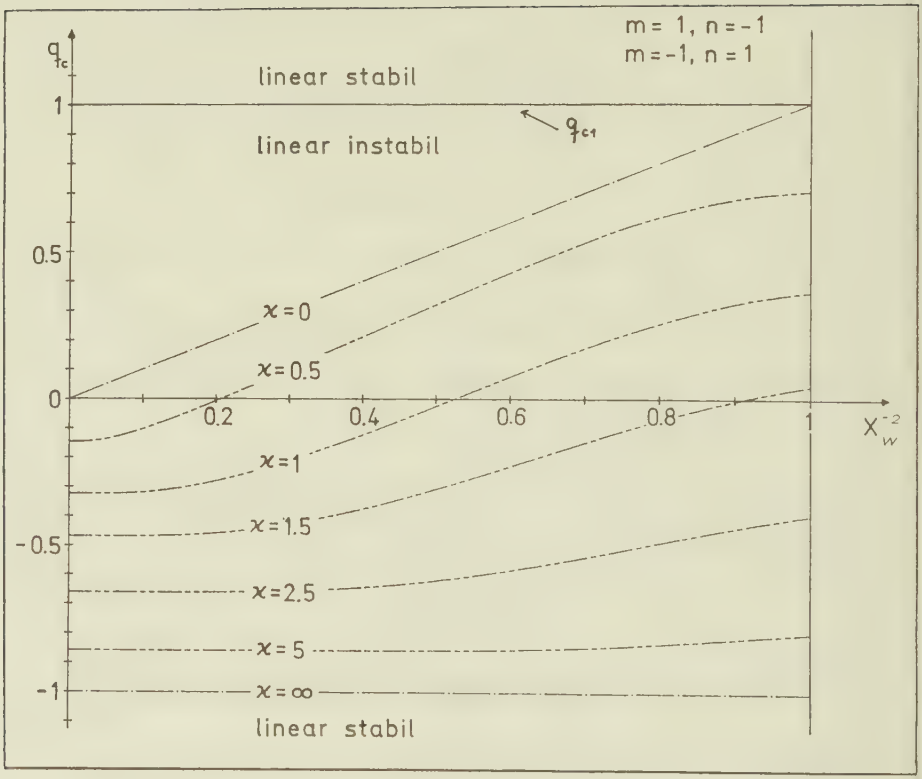


Abb.4: Stabilitätsgrenzen $q = q_{c1} = 1$ und $q = q_{c2}(\varkappa, \chi_w^{-2})$ für verschiedene Werte von $\varkappa$.

Bereich $0 \leq \varkappa \leq 1$ realistisch. Instabilität besteht für gegebenes Aspektverhältnis $\varkappa$ im Bereich zwischen den Kurven $q = -1$ und $q = q_{c2}(\varkappa, x_w^{-2})$. Außerhalb dieses Bereiches ist die betrachtete Mode für dieses Aspektverhältnis stabil. Die Abbildung 4 zeigt das entsprechende Bild für die $m = \pm 1$, $n = \mp 1$ Kink - Mode.

Vergleicht man (4.56) und (4.57) mit der Bestimmungsgleichung (4.30), die sich im Rahmen der Näherungsrechnung für q_c ergibt, so stellt man fest, daß (4.30) nur die zweite marginale Grenze q_{c2} liefert. Die Lösung $q = -1$ ist offensichtlich verloren gegangen. Warum dies so ist, läßt sich einsehen, wenn man das Argument (3.04a) der exakten linearen Lösung betrachtet. Es war ($\varkappa = \hat{\varkappa}$ wegen $n = 1$)

$$Y(x) = \left\{ 4(1+q)^2 \left[\Omega^2 + (1+q)^2 \right]^{-2} - 1 \right\}^{1/2} \varkappa x \quad . \tag{4.58}$$

Für $\Omega^2 = 0$ läßt sich hier gerade der Faktor $(1+q)^2$ kürzen, und wir erhalten das Argument (4.19a) der Näherungslösung.

Betrachtet man ausschließlich die Lösung (4.26), (4.27) des Näherungsverfahrens, so mag die Tatsache, daß die Lösung für $q \dashrightarrow -1$ für alle Werte $\varkappa \neq 0$ und $x \in (0,1)$ (wegen des Verhaltens der Besselfunktionen in (4.23) - (4.25) bei großem Argument) beliebig oft oszilliert, einen Hinweis auf die marginale Grenze bei $q = -1$ geben. Diese ist jedoch offensichtlich schon beim Aufstellen der Näherungsgleichungen (4.09) - (4.11) verloren gegangen (für $\Omega^2 = 0$ und $q \to 1 \dashrightarrow 0$ entsteht in Gleichung (4.58) ein Ausdruck 0/0 !), so daß ein anderer Weg beschritten werden muß, um die marginale Lösung zu finden.

Die gerade geschilderte Schwierigkeit läßt sich am einfachsten beheben, indem man von der Kenntnis der exakten Lösung des linearen Problems Gebrauch macht. Setzt man nämlich in (3.04b) explizit die Entwicklung

$$\Omega^2 = \gamma_1^2 (q - q_{c1}) + \gamma_2^2 (q - q_{c1})^2 + \cdots \tag{4.59}$$

ein, so erhält man für (3.04b)

$$\beta = 2\left\{\gamma_1^2 + (\gamma_2^2+1)(q-q_{c1}) + \ldots\right\}^{-1} \qquad (4.60)$$

Für $q \dashrightarrow q_{c1}$ führt (4.60) auf

$$\beta_0 = 2/\gamma_1^2 \qquad (4.61)$$

Die marginale Lösung an der Grenze q_{c1} ist einfach durch die Gleichungen (4.23) - (4.26) mit diesem Wert β_0 gegeben. Analog erhält man die Druckrandbedingung, die von dieser marginalen Mode erfüllt wird, durch einen entsprechenden Grenzübergang in (3.09). Dieser liefert wieder die Gleichung (4.29), in der allerdings für $y_0(1)$ nach (4.61) $y_0 = (4/\gamma_1^4 - 1)^{1/2}\varkappa$ zu setzen ist. Die Lösungen $\bar{y}_0$ von (4.29) sind uns aber bekannt. Sie wurden bei der Bestimmung der marginalen Grenze q_{c2} ermittelt und erfüllen daher die Gleichung (4.56). Setzen wir in diese die Gleichung (4.61) ein, so erhalten wir:

$$\frac{4-\gamma_1^4}{\gamma_1^4} = \frac{4-(1+q_{c2})^2}{(1+q_{c2})^2}$$

oder

$$\gamma_1^2 = 1+q_{c2} \qquad (4.62)$$

Damit ist auch schon der erste Entwicklungskoeffizient der Anwachsrate an der marginalen Grenze q_{c1} ermittelt. Wir haben das merkwürdige Ergebnis, daß dieser durch die Werte q_{c2} des Sicherheitsfaktors an der zweiten marginalen Grenze bestimmt wird. Aus (4.62) folgt weiter, daß die Näherungslösungen (4.26) und (4.49) - (4.51) an beiden marginalen Grenzen (für gleiche Werte von $\varkappa$, x_∞ und x) gleich lauten. Wir halten fest, daß gilt:

$$\beta_0 = 2/(1+q_{c2}) \qquad \text{für } q = q_{c1} \text{ und } q = q_{c2}\,!$$

Der zweite Entwicklungskoeffizient γ_2^2 für die Anwachsraten an der ersten marginalen Grenze ergibt sich wieder aus (4.53). Die numerische Auswertung zeigte, daß dieser verschwindet.

Wir fassen die Ergebnisse für die Anwachsraten unter Berücksichtigung der Symmetrieüberlegungen (4.55) wie folgt zusammen. An der Grenze $|q_{c1}| = 1$ gilt $(|m| = 1,\ |n| = 1)$

$$\gamma^2 = \frac{B_{01}^2}{r_0 r_1^2}\gamma_1^2 \frac{mn}{\varkappa}(q - q_{c1}) + \sigma\left(\left|\frac{q - q_{c1}}{\varkappa}\right|^3\right) \qquad (4.63)$$

An der Grenze $q = q_{c2}$ gilt $(|m| = 1,\ |n| = 1)$

$$\gamma^2 = \left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \frac{mn}{\varkappa}(q_{c2} - q_c)\right)\frac{mn}{\varkappa}(q_{c2} - q) + \sigma\left(\left|\frac{q_{c2} - q}{\varkappa}\right|^3\right) \qquad (4.64)$$

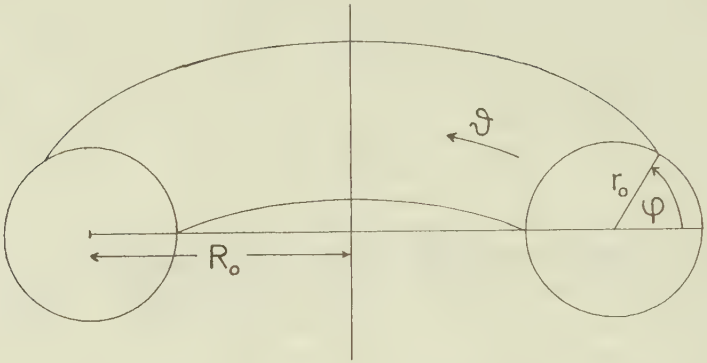
Die Abhängigkeit der Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 (4.32) und γ_2^2 (4.53) von $\varkappa$ und x_w^{-1} zeigen die Abbildungen 5 - 10.

In Abbildung 11 werden für zwei Fälle die Näherungsergebnisse mit den exakten Anwachsraten Ω^2 verglichen. Dabei zeigt es sich, daß die Näherung zweiter Ordnung in dem betrachteten Bereich der b - Werte (die, da hier $\varkappa = 1$ gewählt ist, in diesem Fall mit den q - Werten identisch sind) im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit den exakten Kurven zusammenfällt.

Abbildung 12 zeigt schließlich ein charakteristisches Beispiel für das Verschiebungsfeld $\underline{\xi}_0$ der marginalen Störung an der Grenze $q = q_{c1}$ in der Ebene z=0. Wie in der Abbildung deutlich zu erkennen, treten typischerweise nur geringe Abweichungen von einer "starren helischen" Verschiebung auf; das heißt, an allen Orten (r,φ) sind für festes z die Verrückungen des Plasmas ungefähr gleich groß und gleich gerichtet.

Zum Abschluß der Diskussion des linearen Stabilitätsverhaltens wollen wir noch den Zusammenhang unserer zylindrischen Plasmakonfiguration mit realistischeren Tokamakkonfigurationen ansprechen. Eine typische Kenngröße eines Tokamaks ist das Aspektverhältnis R_0/r_0, wobei man die Definition von R_0 und r_0 der

nachstehenden Skizze entnehmen kann.



Die für die Zylinderkonfiguration zunächst künstlich eingeführte Periodizitätslänge L entspricht hier gerade $2\pi R_o$. Dies bedeutet, daß die Größe $\varkappa = 2\pi r_o/L = r_o/R_o$ in einem Tokamak das inverse Aspektverhältnis ist. Für $\varkappa = r_o/R_o \ll 1$ werden die durch die toroidale Krümmung der Tokamakkonfiguration bedingten Abweichungen vom Zylindermodell sehr klein. Unser zylindrisches Plasma kann deshalb für $\varkappa = 0$ als Tokamak mit unendlichem Aspektverhältnis betrachtet werden. Für $\varkappa \ll 1$ können wir also die Ergebnisse unserer Stabilitätsbetrachtungen auf den für Fusionsplasmen interessanteren Fall des Tokamaks übertragen.

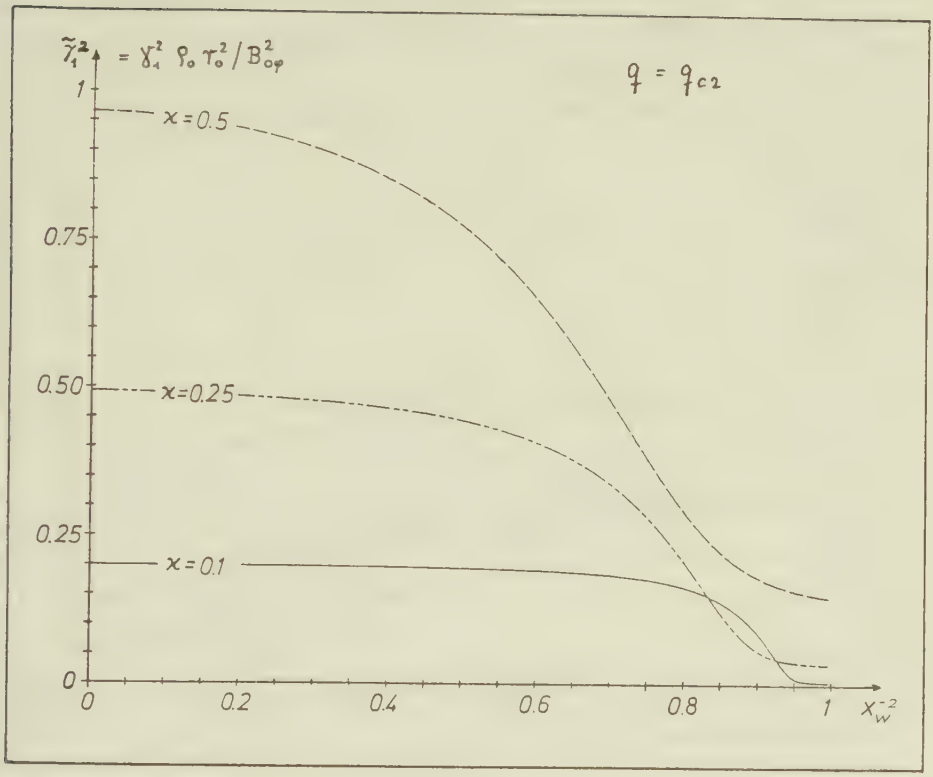


Abb.5: Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 vom Wandabstand x_w. Die zugehörigen Werte $q_{c2}(\varkappa, x_w)$ können der Abb.3 bzw. Abb.4 entnommen werden.

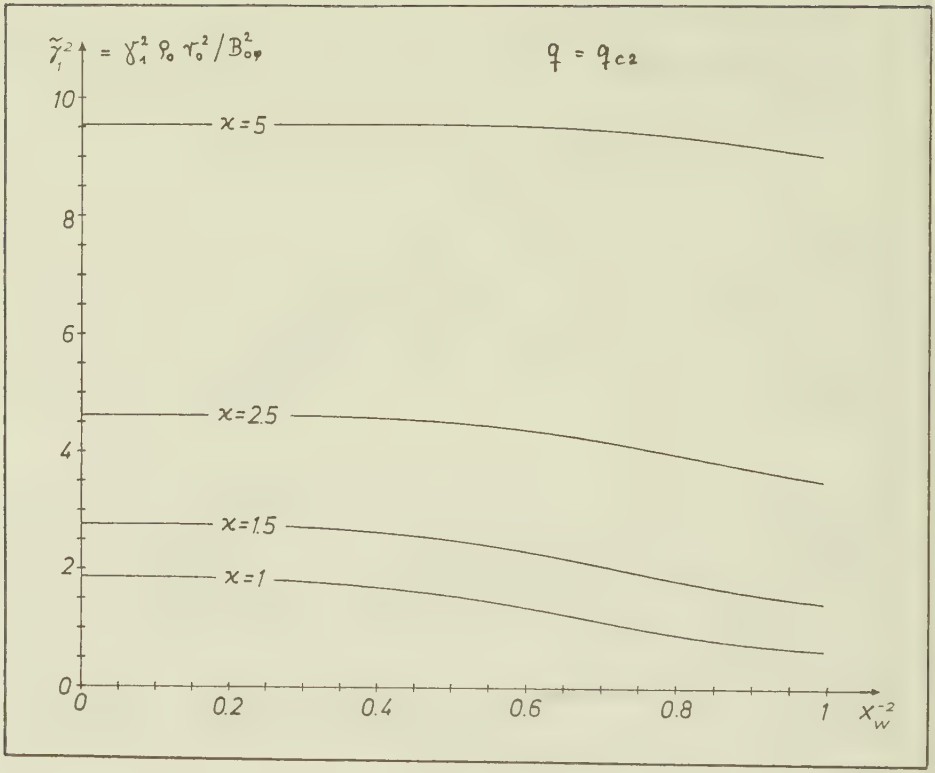


Abb.6: Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 vom Wandabstand x_w. Die zugehörigen Werte $q_{c2}(\varkappa, x_w)$ können der Abb.3 bzw. Abb.4 entnommen werden.

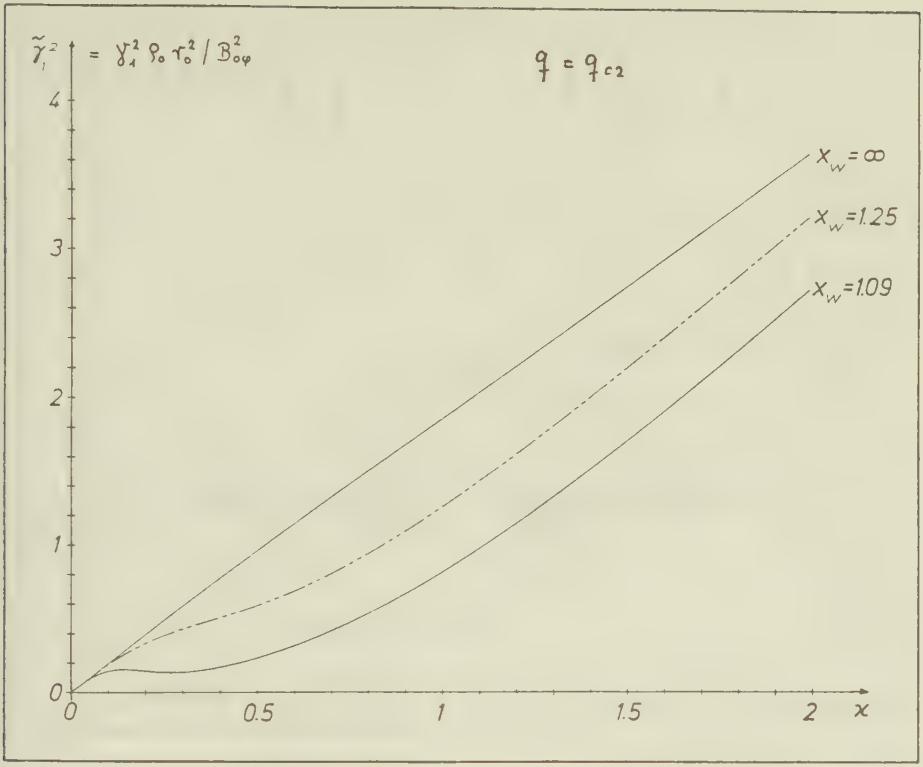


Abb.7: Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 von $\varkappa$. Die zugehörigen Werte $q_{c2}(\varkappa, x_w)$ können der Abb.3 bzw. Abb.4 entnommen werden.

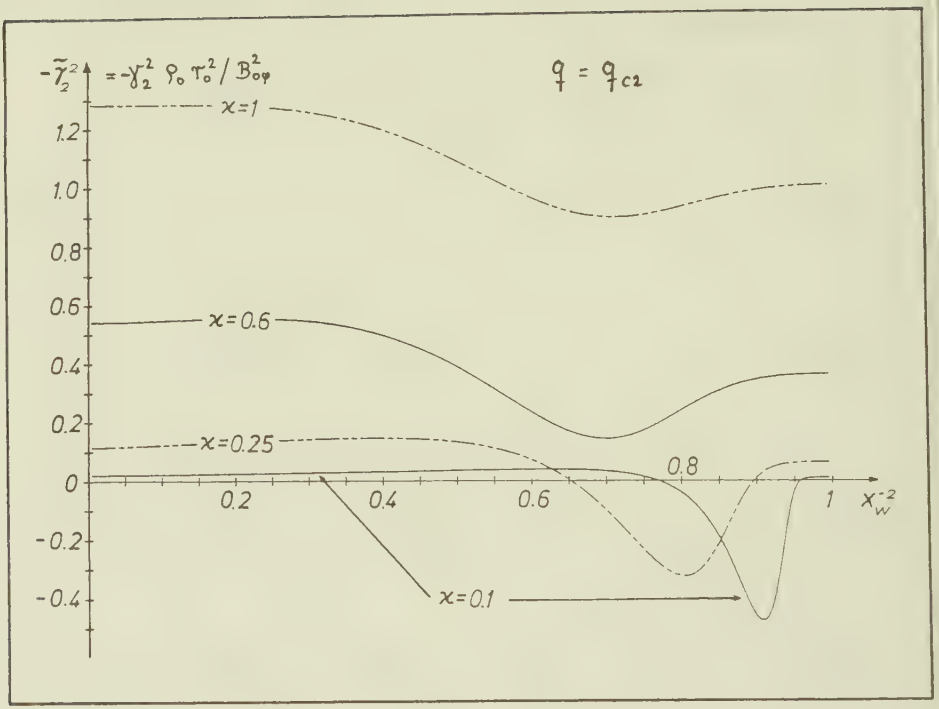


Abb.8: Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten γ_2^2 vom Wandabstand x_w. Die zugehörigen Werte $q_{c2}(\varkappa, x_w)$ können der Abb.3 bzw. Abb.4 entnommen werden.

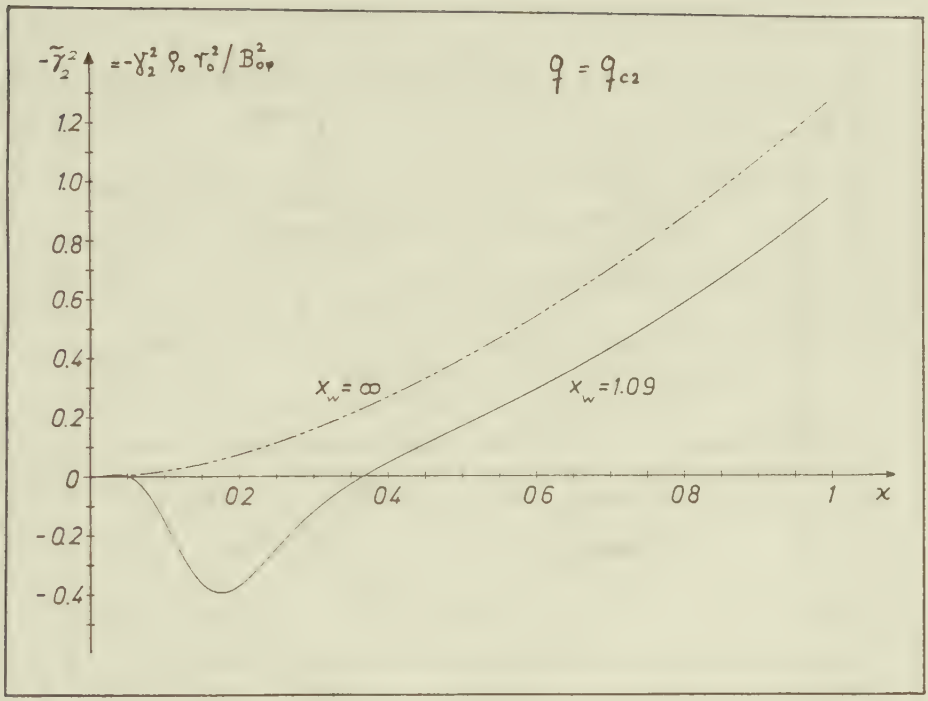


Abb.9: Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten γ_2^2 von $\varkappa$. Die zugehörigen Werte $q_{c2}(\varkappa, x_w)$ können der Abb.3 bzw. Abb.4 entnommen werden.

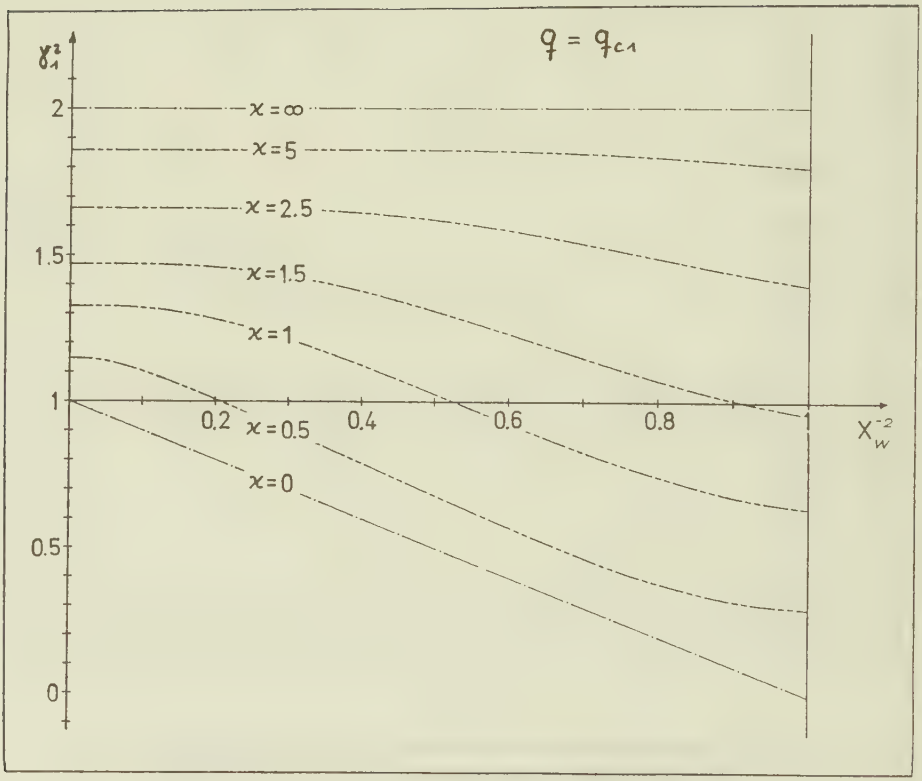


Abb.10: Abhängigkeit des Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 vom Wandabstand x_w ($|q_{c1}| = 1$).

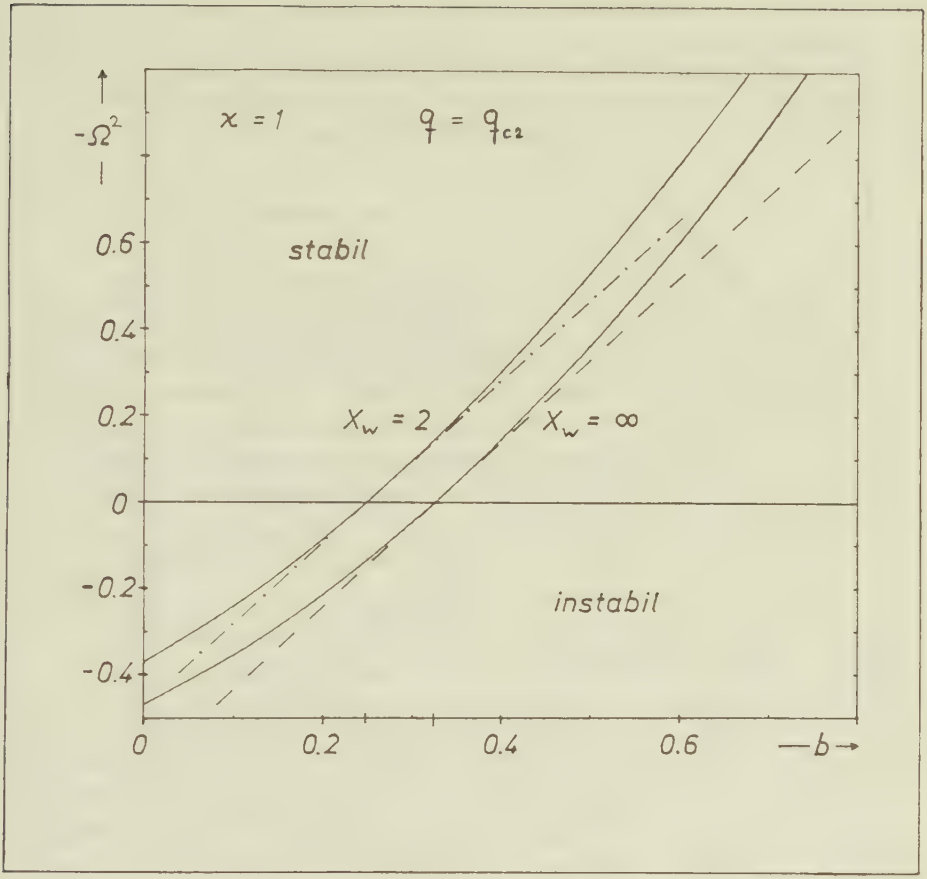


Abb.11: Vergleich der Quadrate der exakten Anwachsraten (durchgezogene Kurven) mit den Ergebnissen der Näherungsrechnung. (Unterbrochene Kurven: Näherung erster Ordnung; die Näherung zweiter Ordnung fällt im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit den exakten Kurven zusammen.)

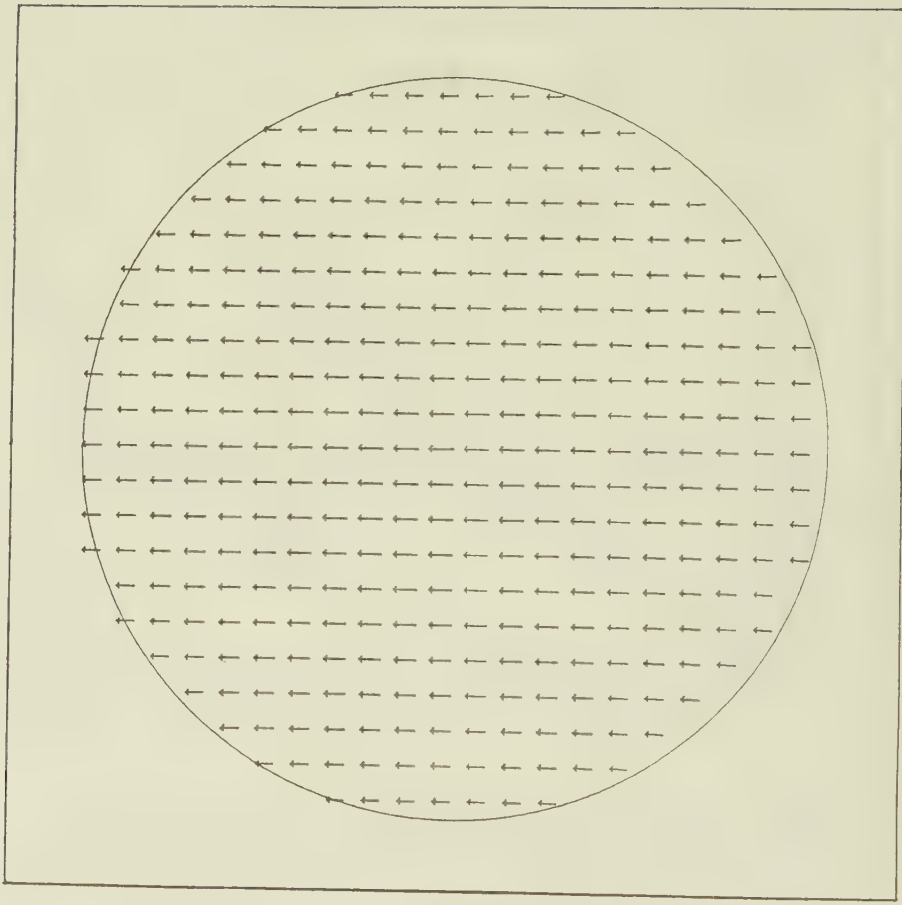


Abb.12: Typisches Beispiel für ein marginales Verschiebungsfeld in der Ebene z=0 ($x_\omega = 1.25$, $\varkappa = 0.2$, $q_{c2} = -0.6118$)

5. Näherungsweise Lösung des linearen Eigenmodenproblems bezüglich axialsymmetrischer Störungen für einen kompressiblen z-Pinch

Als Gleichgewichtskonfiguration betrachten wir wieder den kreisförmigen z-Pinch mit konstantem Stromprofil aus Abschnitt 3., der jetzt allerdings als kompressibel angenommen wird. Es soll jetzt die Stabilität bezüglich axialsymmetrischer, also von der z-Koordinate unabhängiger Störungen untersucht werden. Deren Entwicklungskoeffizienten lauten nach (2.13) - (2.14):

$$\tilde{\underline{f}}_\ell(\underline{r},t) = \underline{f}_\ell(\underline{r}) \exp(\gamma t)$$

$$\underline{f}_\ell(\underline{r}) = \underline{f}_\ell^m(x) \exp(im\varphi) \qquad \ell = 0,1,2,\ldots \qquad (5.01)$$

und

$$\tilde{\underline{\alpha}}_\ell(\underline{r},t) = \underline{\alpha}_\ell(\underline{r}) \exp(\gamma t)$$

$$\underline{\alpha}_\ell(\underline{r}) = \underline{\alpha}_\ell^m(x) \exp(im\varphi) \qquad \ell = 0,1,2,\ldots \qquad (5.02)$$

Dabei werden wir uns auf die Untersuchung der m = 1 Mode beschränken. Als treibenden Parameter und gleichzeitig als Entwicklungsparameter wählen wir das Quadrat des reziproken, normierten Wandabstandes

$$\tau := X_w^{-2} = \left(r_0/r_w\right)^2 \qquad (5.03)$$

Diese Wahl ist aus folgendem Grund sinnvoll: Wird der z - Pinch im Fall $\tau = 0$ (Wand im Unendlichen, dies entspricht einer Konfiguration ohne Wand) senkrecht zu seiner Achse starr verschoben (dies ist eine spezielle axial- symmetrische Störung), so bleibt er aus Symmetriegründen im Gleichgewicht. Dies bedeutet, daß für $\tau = 0$ Marginalität vorliegt. Für $\tau > 0$ geht diese Eigenschaft verloren. Die Rechnung wird zeigen, daß für $\tau > 0$ Stabilität vorliegt.

Zunächst bestimmen wir aus der Gleichung (2.18) mit N = 0

$$\underline{\underline{F}}_{oo}(\underline{\mathcal{F}}_o) = \underline{0} \tag{5.05}$$

die marginale Mode $\underline{\mathcal{F}}_o$.
(5.05) liefert mit (A.1) - (A.5) die sehr einfachen Gleichungen

$$[\chi(\chi \mathcal{F}^1_{or})^*]^* - \mathcal{F}^1_{or} = 0 \;, \quad \mathcal{F}^1_{o\varphi} = i(\chi \mathcal{F}^1_{or})^* \;, \quad \mathcal{F}^1_{oz} = 0 \;. \tag{5.06}$$

Fordert man, daß die Lösung im Koordinaten-Ursprung regulär sein soll, so findet für die marginale Mode $\underline{\mathcal{F}}_o$ gerade die starre Verschiebung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{or} &= K_o \cos\varphi \\ \mathcal{F}_{o\varphi} &= -K_o \sin\varphi \\ \mathcal{F}_{oz} &= 0 \end{aligned} \tag{5.07}$$

mit beliebigem K_o.

Aus den Gleichungen (2.05), (2.06), (2.08) und (2.09), das heißt aus

$$\begin{aligned} \nabla\times(\nabla\times\underline{\mathcal{A}}) = \underline{0} \quad &\Longrightarrow \quad (\chi\mathcal{A}^1_\varphi)^* - i\mathcal{A}^1_\tau = 0 \\ &\quad [\chi^{-1}[(\chi\mathcal{A}^1_\varphi)^* - i\mathcal{A}^1_\tau]]^* = 0 \\ &\quad \chi(\chi\mathcal{A}^1_z{}^*)^* - \mathcal{A}^1_z = 0 \\ \nabla\cdot\underline{\mathcal{A}} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (\chi\mathcal{A}^1_\tau)^* + i\mathcal{A}^1_\varphi = 0 \\ \underline{n}_o\times\underline{\mathcal{A}} = \underline{0} \quad &\text{auf } \mathcal{T}_o \\ \underline{n}_o\times\underline{\mathcal{A}} = (\underline{n}_o\cdot\underline{\mathcal{F}})\,\underline{\mathcal{B}}^V_o \quad &\text{auf } S_o \end{aligned}$$

bestimmen wir das exakte Vektorpotential des Vakuumstörmagnetfeldes, da wir dieses auch in Kapitel 6 benötigen. Es ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1_z(x) &= \mathcal{B}_{o\varphi}\,\mathcal{F}^1_\tau\big|_{S_o}\,\frac{\chi^{-1}-\tau\chi}{1-\tau} \\ \mathcal{A}^1_\varphi(x) &= -\mathcal{B}_{o\varphi}\,\mathcal{L}\,\mathcal{F}^1_\tau\big|_{S_o}\,\frac{\chi^{-2}-\tau}{1-\tau} \\ \mathcal{A}^1_\tau(x) &= -i\,\mathcal{B}_{o\varphi}\,\mathcal{L}\,\mathcal{F}^1_\tau\big|_{S_o}\,\frac{\chi^{-2}+\tau}{1-\tau} \end{aligned} \tag{5.08}$$

gegeben. Hieraus erhält man die Entwicklungskoeffizienten $\underline{\mathcal{A}}_\ell$ durch Reihenentwicklung bezüglich τ und die ersten beiden Entwicklungskoeffizienten lauten mit (5.02)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{0z}(x,\varphi) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\ \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\ x^{-1}\ \cos\varphi \\
\mathcal{A}_{0\varphi}(x,\varphi) &= -\mathcal{B}_{0\varphi}\, b\ \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\ x^{-2}\ \cos\varphi \\
\mathcal{A}_{0r}(x,\varphi) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\, b\ \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\ x^{-2}\ \sin\varphi
\end{aligned} \tag{5.09}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{1z}(x,\varphi) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\ \left[\ \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\ (x^{-1}-x)\ +\ \mathcal{F}^{1}_{1r}\big|_{S_0}\ x^{-1}\right]\cos\varphi \\
\mathcal{A}_{1\varphi}(x,\varphi) &= -\mathcal{B}_{0\varphi}\, b\left[\ \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\ (x^{-2}-1)\ +\ \mathcal{F}^{1}_{1r}\big|_{S_0}\ x^{-2}\right]\cos\varphi \\
\mathcal{A}_{1r}(x,\varphi) &= \mathcal{B}_{0\varphi}\, b\left[\ \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\ (x^{-2}+1)\ +\ \mathcal{F}^{1}_{1r}\big|_{S_0}\ x^{-2}\right]\sin\varphi\ .
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Gleichung (2.39) zur Bestimmung des Entwicklungskoeffizienten γ_1^2 vereinfacht sich, da die Gleichgewichtsgrößen p_0, $\underline{B}_0^{(v)}$ und $\underline{j}_0$ nicht von dem treibenden Parameter abhängen, und daher in (2.39) W_1^{p1}, $W_1^{j\omega}$ und das Integral über S_0 mit $p_{01} = 0$, $\underline{B}_{01} = \underline{0}$ und $\underline{B}^{v}_{0\omega} = \underline{0}$ verschwinden. Man findet mit (2.37a) und (2.37b)

$$\begin{aligned}
-\gamma_1^2\,\rho_0\left(\underline{r}_0,\underline{r}_0\right) &= -\int_{\mathcal{C}_{00}} \left(\underline{n}_{00}\times\underline{\mathcal{A}}_1^{*} + \underline{n}_{01}\times\underline{\mathcal{A}}_0^{*}\right)\cdot\left(\nabla\times\underline{\mathcal{A}}_0\right) d\sigma \;= \\
&= \int_{S_0}\left\{\left(\underline{n}_0\times\underline{\mathcal{A}}_1\right)\cdot\left(\nabla\times\underline{\mathcal{A}}_0\right) - \left(\underline{n}_0\times\underline{\mathcal{A}}_0\right)\cdot\left(\nabla\times\underline{\mathcal{A}}_1\right)\right\} d\sigma \;= \\
&= \mathcal{B}_{0\varphi}^2 \int_0^{2\pi}\int_z \left\{\left(-\mathcal{F}^{1}_{1r}\big|_{S_0}\right)\mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0} + \mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\left(2\,\mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0} + \mathcal{F}^{1}_{1r}\big|_{S_0}\right)\right\}\cos^2\varphi\, d\varphi\, dz \\
&= 2\left(\mathcal{F}^{1}_{0r}\big|_{S_0}\right)^2 \pi\, \mathcal{B}_{0\varphi}^2 \int_z dz
\end{aligned}$$

Dies liefert mit (A.9) den Entwicklungskoeffizienten für das Quadrat der Anwachsraten $\gamma_1^2 = -2\,\mathcal{B}_{0\varphi}^2/(\rho_0 r_0^2)$.

Der in (5.10) auftretende, noch unbekannte Entwicklungskoeffizient $\underline{F}^1_{\nu\nu}|_{s_0}$ hat sich bei der Berechnung herausgehoben; (dies ist auch der Grund, warum hier von dem allgemeinen Vorgehen in Abschnitt 2.2.3. etwas abgewichen wurde).

Will man nun die sich in nächster Ordnung aus (2.18) ergebende Gleichung

$$\underline{F}_{00}(\underline{\xi}_1) = \rho_0 \gamma_1^2 \underline{\xi}_0 \qquad (5.11)$$

lösen, so führt dies für $\underline{\xi}_1$ auf Funktionen, die bei $x = 1$ singulär werden. Das Auftreten dieser Singularität hat uns bewogen, das vorliegende Eigenwertproblem exakt zu lösen (Abschnitt 6.). Wir werden sehen, daß auch in der exakten Lösung (für $\tau > 0$) eine Singularität auftritt, die mit wachsendem τ vom Plasmarand ins Innere des Plasmas wandert.

Dieser Fall ist in dem in Kapitel 2. entwickelten Näherungsverfahren nicht vorgesehen. Es wurde deshalb nach der Berechnung des ersten Entwicklungskoeffizienten der Anwachsrate abgebrochen.

6. Exakte Lösung des linearen Eigenmodenproblems bezüglich axialsymmetrischer Störungen für einen kompressiblen z-Pinch

6.1. Reduktion des Problems auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für ξ_r

Wir betrachten wieder die Gleichgewichtskonfiguration (3.01) und untersuchen ihre Stabilität bezüglich axialsymmetrischer Störungen der Form

$$\tilde{\underline{\xi}}(\underline{r},t) = \underline{\xi}(\underline{r})\exp(\gamma t) \quad , \quad \underline{\xi}(\underline{r}) = \underline{\xi}^{1}(x)\exp(i\varphi) \tag{6.01}$$

$$\tilde{\underline{\alpha}}(\underline{r},t) = \underline{\alpha}(\underline{r})\exp(\gamma t) \quad , \quad \underline{\alpha}(\underline{r}) = \underline{\alpha}^{1}(x)\exp(i\varphi), \tag{6.02}$$

wobei wir uns wieder auf die m = 1 Mode beschränkt haben. Bezeichnet

$$\Omega^2 := \frac{\gamma^2 \rho_0 r_0^2}{B_{0\varphi}^2}$$

das Quadrat der normierten Anwachsraten und wird zur Schreibvereinfachung noch die Größe

$$\Delta := r_0 \nabla \cdot \underline{\xi} = x^{-1}(x\xi_r^1)' + i x^{-1}\xi_\varphi^1 \tag{6.03}$$

eingeführt, so läßt sich (2.03) in der Form

$$\Omega^2 \xi_r^1 = \left[\tfrac{5}{3}(1-x^2)\Delta\right]' + \left[x(x\xi_r^1)'\right]' - \xi_r^1 - i\ell\xi_z^{1\,\cdot} + \ell^2\Delta' \tag{6.04}$$

$$\Omega^2 \xi_\varphi^1 = \frac{i}{x}\left\{\tfrac{5}{3}(1-x^2)\Delta + \ell\xi_z^1 + i\ell^2\Delta\right\} \tag{6.05}$$

$$\Omega^2 \xi_z^1 = -\xi_z^1 - i\ell\Delta \tag{6.06}$$

schreiben.

Als Hilfsgrößen werden die Funktionen

$$C(\lambda^2) = C(0) / D(\lambda^2)$$

mit

$$C(0) = 1 + 3/5 \frac{-\Omega^2}{1+\Omega^2}$$

sowie

$$B(\lambda^2) = B(0) / D(\lambda^2)$$

mit

$$B(0) = 1 - 3/5\,\Omega^2 \qquad (6.07)$$

und

$$A(\lambda^2) = A(0) / D(\lambda^2)$$

mit

$$A(0) = C(0) - B(0) = 3/5 \frac{\Omega^4}{1+\Omega^2}$$

und

$$D(\lambda^2) = 1 - 3/5 \frac{-\Omega^2}{1+\Omega^2} \lambda^2$$

eingeführt. Hiermit erhält man aus den Gleichungen (6.04)-(6.05)

$$f_z^1 = -i \frac{\lambda}{1+\Omega^2} \Delta \qquad (6.08)$$

$$\Delta = \frac{-3\Omega^2 (x^2 f_r^{1'} + x f_r^1)}{B(\lambda^2) x^2 - 1} \qquad (6.09)$$

$$f_\varphi^1 = i \frac{(x^2 - D(\lambda^2))(x f_r^{1'} + f_r^1)}{B(\lambda^2) x^2 - 1} \{D(\lambda^2)\}^{-1} \qquad (6.10)$$

und für f_r^1 die Differentialgleichung

$$\left\{ x (x f_r^1)' \frac{C(\lambda^2) x^2 - 1}{B(\lambda^2) x^2 - 1} \right\}' - f_r^1 = 0 \quad . \qquad (6.11)$$

Diese besitzt bei $x = (C(b^2))^{-1/2}$ und $x = 0$ eine Singularität.

Physikalisch kommt nur die bei $x=0$ reguläre Lösung in Betracht. Für diese folgt aus Gleichung (6.11) ein eindeutiger Wert von $(\xi_r^{1\prime} / \xi_r^1)|_{S_0}$, der von Ω^2 und b^2 abhängt und im folgenden mit

$$F(\Omega^2, b^2) := \left(\xi_r^{1\prime}/\xi_r^1\right)\Big|_{S_0} \tag{6.12}$$

bezeichnet wird. Die Funktion $F(\Omega^2, b^2)$ erhält man durch Lösen der Differentialgleichung (6.11). Setzen wir (6.12) und die schon bestimmte Lösung (5.08) für das Vektorpotential in die Randbedingung (2.07) ein, so bekommem wir mit $p_0|_{S_0} = 0$ die Dispersionsrelation

$$\frac{2\Upsilon}{\Upsilon - 1} - F(\Omega^2, b^2) - \frac{\Omega^2 b^2}{1 + b^2 + \Omega^2}\left(1 + F(\Omega^2, b^2)\right) = 0 \quad , \tag{6.13}$$

aus der die Anwachsraten

$$\Omega^2 = \Omega^2(\Upsilon, b^2)$$

bestimmt werden können.

6.2. Lösung der Differentialgleichung (6.11)

Durch die Variablentransformation

$$w := C(\ell^2)\,x^2$$

und Einführung der Größen

$$a := C(\ell^2)/B(\ell^2) \quad , \quad d := A(\ell^2)/C(\ell^2)$$

bringen wir die Differentialgleichung (6.11) auf die Form

$$w(w-1)(w-a)\frac{d^2 f_\nu^{\wedge 1}}{dw^2} + \left[2(w-1)(w-a) - adw\right]\frac{d f_\nu^{\wedge 1}}{dw} + \frac{d}{4}\left[w-3a\right] f_\nu^{\wedge 1} = 0 \qquad (6.14)$$

(6.14) ist die 'Heunsche Differentialgleichung' /14/ mit den schwach singulären Stellen

$$w_0 = 0 \quad , \quad w_1 = 1 \quad , \quad w_2 = a \quad , \quad w_3 = \infty .$$

Im folgenden werden wir (6.14) durch Reihenansätze lösen.

Wir machen zunächst eine Entwicklung um die Stelle $w = 0$ und finden mit der Forderung, daß $f_\nu^{\wedge}$ im Ursprung regulär sein soll, unter Benutzung der ursprünglichen Variablen x die Lösung

$$f_\nu^{\wedge I}(x) = \sum_{K=0}^{\infty} a_K \left[C(\ell^2)x^2\right]^K$$

$$a_1 = 3d/8\; a_0 \qquad (a_0 \text{ beliebig}) \qquad (6.15)$$

$$a_{\ell+1}\; a(\ell+2)(\ell+1) = a_\ell \left\{2\ell(\ell+1) + (\ell+3/2)(\ell+1/2)ad\right\} - a_{\ell-1}\left\{\ell(\ell-1) + d/4\right\} \qquad (\ell \geq 1)$$

Diese Lösung ist definiert für

$$x \in \left[0\;,\; \{C(\ell^2)\}^{-1/2}\right) .$$

Die Variablentransformation $u := w - 1$ liefert die Differentialgleichung

$$(u^2 + [1-\alpha\delta]u - \alpha\delta)u\frac{d^2 f_\nu^1}{du^2} + (2u^2 - 3\alpha\delta u - \alpha\delta)\frac{d f_\nu^1}{du} + (\delta u/4 - \alpha\delta[2+\delta]/4) f_\nu^1 = 0 ,$$

die unter Benutzung der unsprünglichen Variablen x durch

$$f_\nu^{1,II}(x) = \ln\left|C(b^2)x^2-1\right| \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[C(b^2)x^2-1\right]^k + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{b}_k \left[C(b^2)x^2-1\right]^k$$

$$b_1 = -(2+\delta)/4\; b_0 \qquad (b_0 \text{ beliebig})$$

$$b_{\ell+1}\,\alpha\delta(\ell+1)^2 = b_\ell\{\ell(\ell-1) - \alpha\delta[\ell(\ell+2)+(2+\delta)/4]\} + b_{\ell-1}\{\ell(\ell-1) + \delta/4\} \qquad (\ell \geq 1) \qquad (6.16)$$

$$\bar{b}_1 = -(2+\delta)/4\;\bar{b}_0 - \alpha^{-1}(1-\delta^2/2)b_0 \qquad (\bar{b}_0 \text{ beliebig})$$

$$\bar{b}_{\ell+1}\,\alpha\delta(\ell+1)^2 = \bar{b}_\ell\{\ell(\ell-1) - \alpha\delta[\ell(\ell+2)+(2+\delta)/4]\} + \bar{b}_{\ell-1}\{\ell(\ell-1)+\delta/4\} + b_\ell\{3 - \frac{4+\alpha\delta(1-\delta/2)}{\ell+1}\} + b_{\ell-1}\{3 - \frac{4+\delta/2}{\ell+1}\} \qquad (\ell \geq 1)$$

gelöst wird. Diese Lösung hat bei $x = (C(b^2))^{-1/2}$ eine logarithmische Singularität und ist definiert für

$$x \in \left(\sqrt{\{1-\alpha\delta\}/C(b^2)}\;,\; \sqrt{\{1+\alpha\delta\}/C(b^2)}\right).$$

Die Variablentransformation $v := w - a$ liefert die Differentialgleichung

$$\left(v^2 + a(1+\alpha)v + a^2\alpha\right) v \frac{d^2 f_\nu^1}{dv^2} + \left(2v^2 + a\alpha v - a^2\alpha\right) \frac{d f_\nu^1}{dv} + \left(\alpha/4\, v - a\alpha/2\right) f_\nu^1 = 0 \,,$$

die unter Benutzung der ursprünglichen Variablen x durch

$$f_\nu^{1,\,III}(x) = \left(C(\ell^2)x^2 - a\right)^2 \sum_{K=0}^{\infty} c_K \left[C(\ell^2)x^2 - a\right]^K + \sum_{K=0}^{\infty} \bar{c}_K \left[C(\ell^2)x^2 - a\right]^K$$

$$c_1 = -\frac{4+7\alpha}{6a\alpha}\, c_0 \qquad (c_0 \text{ beliebig})$$

$$c_{\ell+1}\; a^2\alpha(\ell+3)(\ell+1) = -c_\ell\, a\left\{(\ell+2)(\ell+1) + \left[(\ell+2)^2 - 1/2\right]\alpha\right\} + \qquad (6.17)$$
$$- c_{\ell-1}\left\{(\ell+2)(\ell+1) + \alpha/4\right\} \qquad (\ell \geq 1)$$

$$\bar{c}_1 = -\,a^{-1}/2\;\bar{c}_0 \qquad (\bar{c}_0 \text{ beliebig})$$

$$\bar{c}_{\ell+1}\; a^2\alpha\,(\ell^2-1) = -\bar{c}_\ell\; a\left\{\ell(\ell-1) + (\ell^2 - 1/2)\alpha\right\} + \qquad (\ell \geq 1)$$
$$- c_{\ell-1}\left\{\ell(\ell-1) + \alpha/4\right\}$$

gelöst wird. Die Lösung ist definiert für

$$x \in \left(\sqrt{[1-\alpha]/B(\ell^2)}\;,\; \sqrt{[1+\alpha]/B(\ell^2)}\;\right).$$

Schließlich geben wir noch eine Entwicklung um die Stelle $w = \infty$ an. Durch die Variablentransformation $\eta := a / w$ erhält man die Differentialgleichung

$$\eta(\eta-1)(\eta-a)\frac{d^2 F_\tau^1}{d\eta^2} + ad\eta\frac{dF_\tau^1}{d\eta} + ad/4(\eta^{-1}-3)F_\tau^1 = 0,$$

die mit dem Ansatz

$$F_\tau^{1,\overline{IV}}\left(\frac{a}{C(b^2)x^2}\right) = F_\tau^{1,\overline{IV}}(\eta) = \eta^{\mu}\cdot f(\eta)$$

für

$$\mu_1 = \left(1+[1-d]^{1/2}\right)/2 \quad , \quad \mu_2 = d/\mu_1$$

wiederum auf die 'Heunsche Differentialgleichung' führt und durch

$$F_\tau^{1,\overline{IV}}(\eta) = \eta^{\mu_1}\cdot f_1(\eta) + \eta^{\mu_2}\cdot f_2(\eta)$$

gelöst wird. Dabei sind $f_1(\eta)$ und $f_2(\eta)$ durch

$$f_i(\eta) = \sum_{K=0}^{\infty} d_{i,K}\,\eta^K \qquad (i = 1,2)$$

$$d_{i,1} = \frac{(2a h_i - 1)d}{8a\mu_i}\, d_{i,0} \qquad (d_{i,0}\ \text{beliebig})$$

$$d_{i,\ell+1}\, a(\ell+1)(\ell+1-h_i) =$$

$$= d_{i,\ell}\{\ell[(\ell-h_i)(1+a)-ad]+[2ah_i-1]d/4\} - \tag{6.18}$$

$$- d_{i,\ell-1}\{(\ell-1)(\ell-1-h_i)-d/4\} \qquad (\ell \geq 1)$$

$$h_i = 1 - 2\mu_i$$

gegeben. Mit der Variablen x lautet die für $x \in \left(\{B(b^2)\}^{-1/2}, \infty\right)$ definierte Lösung

$$F_\tau^{1,\overline{IV}}(x) = x^{-2\mu_1} f_1\left(\frac{1}{B(b^2)x^2}\right) + x^{-2\mu_2} f_2\left(\frac{1}{B(b^2)x^2}\right).$$

Dabei wurde in f_i ein Faktor $(a/C(b^2))^{\mu_i}$ in $d_{i,0}$ hineingezogen.

Von den vier Lösungsbereichen haben je zwei benachbarte einen nichtverschwindenden Überlappungsbereich. Setzt man in (6.15) den Koeffizienten $a_0 = 1$, so lassen sich die Teillösungen an geeigneten Anschlußstellen $\hat{x}$ aus den Überlappungsbereichen der Intervalle durch die Forderung, daß jeweils der Funktionswert und die erste Ableitung übereinstimmen sollen, beliebig glatt anpassen. Damit ist die Lösung $f_r^1(x)$ und mit (6.08) - (6.10) auch f_φ^1 und f_z^1 bis auf einen freien Amplitudenfaktor a_0 eindeutig bestimmt. Für

$$X \longrightarrow \left\{ B(\lambda^2) \right\}^{-1/2} :$$

findet man

$$X\left(f_r^1(x)\right)^{\cdot} + f_r^1(x) = X\left(f_r^{1,\,III}(x)\right)^{\cdot} + f_r^{1,\,III}(x)$$

$$\longrightarrow \text{const} \cdot \left\{ B(\lambda^2) X^2 - 1 \right\} ,$$

das heißt, die Lösung $f_r^1(x)$ ist gerade so beschaffen, daß die durch (6.08) - (6.10) gegebenen Komponenten f_φ^1 und f_z^1 des Verschiebungsfeldes keine weiteren Singularitäten haben.

Das Auftreten einer Singularität im Verschiebungsfeld $\underline{\xi}$ bedeutet, daß die bei der Linearisierung der idealen MHD-Gleichungen (1.01) - (1.10) eingegangenen Voraussetzungen über die Kleinheit von $\underline{\xi}$ verletzt sind. So wäre es denkbar, daß nichtlineare Effekte die auftretenden Verschiebungen des Plasmas begrenzen.

6.3. Diskussion der Ergebnisse

Durch einfache Rechnungen konnten mit geringen Modifikationen des Näherungsverfahrens aus Abschnitt 2 die marginale Mode und die erste Näherung für die Anwachsraten bestimmt werden. Das marginale Verschiebungsfeld war gerade die starre Verschiebung, und die Anwachsraten waren in niedrigster Näherung von der Stärke $B_{0\varphi} b$ des axialen Magnetfeldes unabhängig. Bei der weiteren Auswertung des Näherungsverfahrens zeigte es sich, daß der nächste Entwicklungskoeffizient $\underline{\xi}_1$ des Verschiebungsfeldes für $x = 1$ singulär wurde und damit das Näherungsverfahren nicht mehr anwendbar war. Die exakte Lösung des Eigenmodenproblems bezüglich axialsymmetrischer Störungen zeigte, daß das Auftreten der Singularitäten nicht durch das Näherungsverfahren, sondern durch die Problemstellung bedingt ist. Es konnten Aussagen über das Verhalten der Singularität des Verschiebungsfeldes in Abhängigkeit vom Wandabstand X_w und der Stärke $B_{0\varphi} b$ des axialen Magnetfeldes gewonnen werden. Die Abbildungen 13a und 13b zeigen für ein typisches Beispiel die Abhängigkeit der Komponenten des Verschiebungsfeldes und $\mathrm{div}\underline{\xi}$ von der normierten radialen Koordinate x. Das entsprechende Verschiebungsfeld selbst ist in Abbildung 14 wiedergegeben.

Die Abhängigkeit der Anwachsraten vom Abstand der ideal leitenden Wand zur Plasmaoberfläche ist in Abbildung 15 für $b = 0$ wiedergegeben, in der auch die sich aus dem ersten Entwicklungskoeffizienten ergebende Näherung für die Anwachsraten eingetragen ist. Ist die Stärke $B_{0\varphi} b$ des axialen Magnetfeldes von Null verschieden, ergeben sich nur geringe Abweichungen von dem in Abbildung 15 gegebenen Kurvenverlauf.

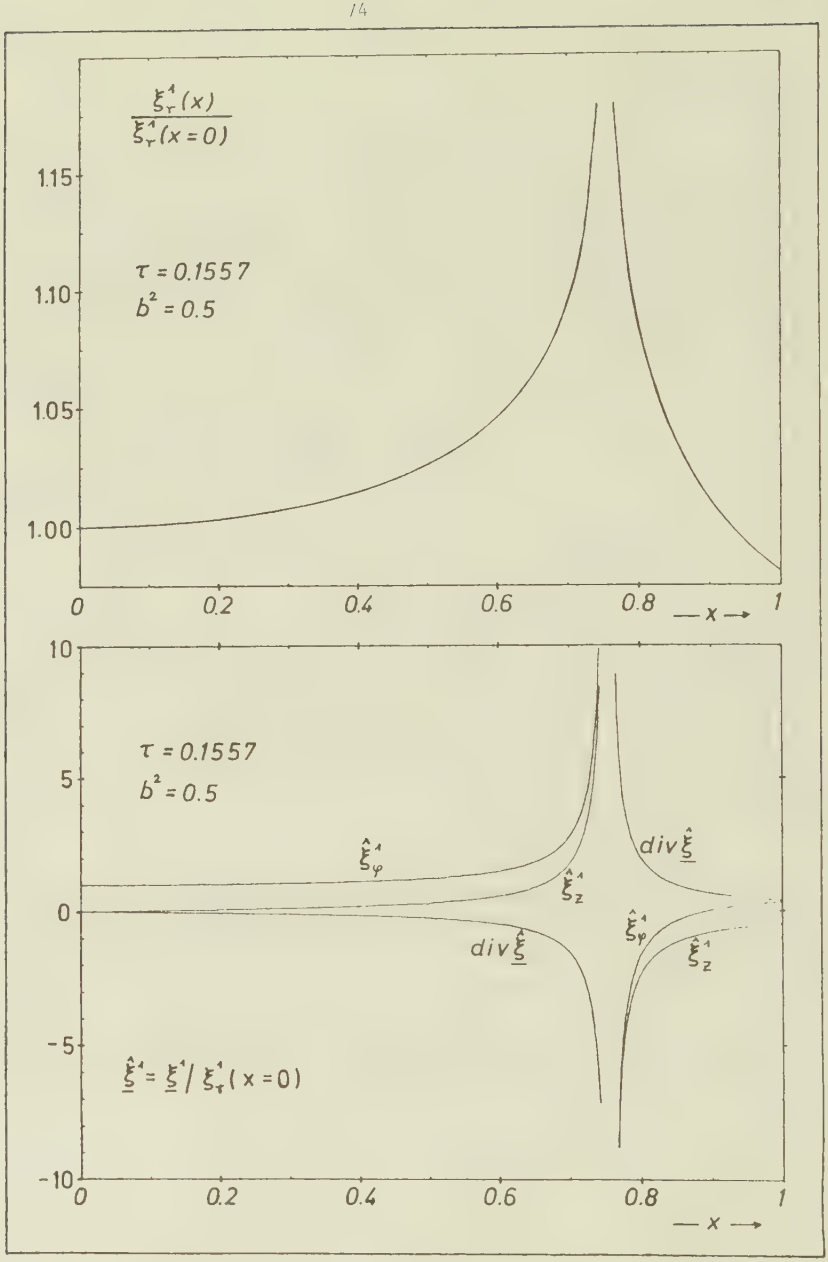


Abb.13: Abhängigkeit der Komponenten des Verschiebungsfeldes $\underline{\xi}^1$ und von $div\,\underline{\xi}$ von der normierten radialen Koordinate x für $b^2 = 0.5$ und $\tau = x_{\omega}^{-2} = 0.1557$.

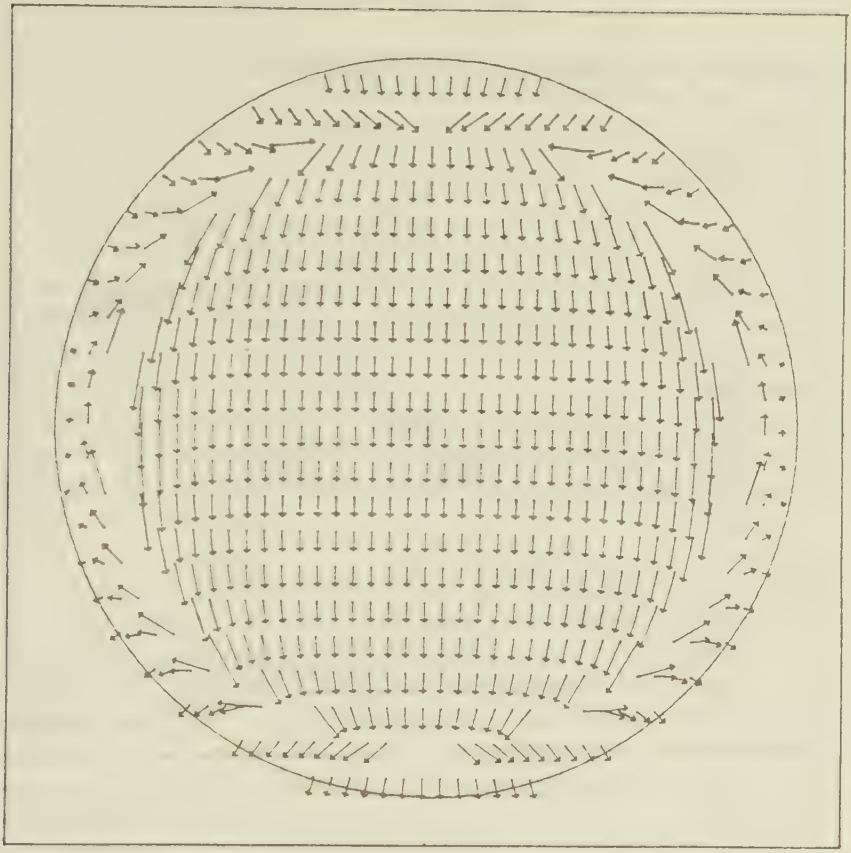


Abb.14: Verschiebungsfeld $\underline{\xi}$ ($b^2 = 0.5$, $\tau = x_w^{-2} = 0.1557$).

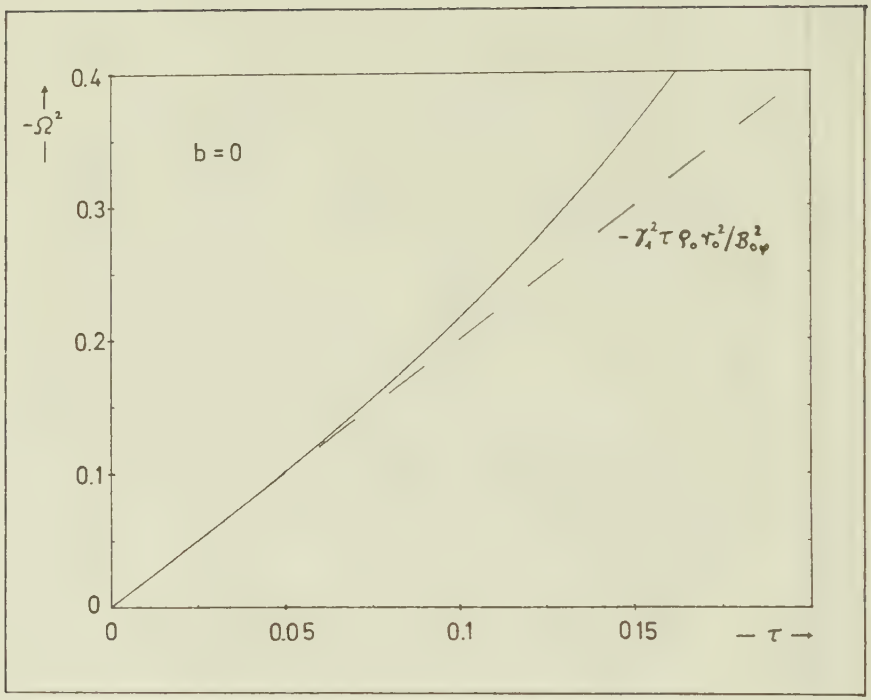


Abb.15: Vergleich der exakten Abhängigkeit der Quadrate Ω^2 der Anwachsraten von $\tau = x_0^{-3}$ mit dem Ergebnis erster Ordnung (unterbrochene Kurve) des Näherungsverfahrens.

7. Untersuchung des nichtlinearen Stabilitätsverhaltens in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze für einen kompressiblen z - Pinch

7.1. Einleitung

Die nachfolgenden nichtlinearen Stabilitätsuntersuchungen basieren auf den beiden Arbeiten /8, 9/ von E. Rebhan über die nichtlineare Entwicklumg idealer MHD - Moden in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze. Wir wollen im folgenden die dort entwickelte Theorie auf den bereits in den Kapiteln 3 bis 6 betrachteten kreisförmigen z - Pinch mit konstantem Stromprofil anwenden, um das nichtlineare Stabilitätsverhalten bezüglich der $m = n = 1$ - Mode zu untersuchen.

Zunächst soll kurz das Prinzip der nichtlinearen Entwicklung skizziert werden. In /8, 9/ wird von einer Entwicklung der Gleichgewichtsgrößen p_0 und $\underline{B}_0$ sowie der Darstellung $\underline{r}_0(u,v;\lambda)$ der ideal leitenden Wand $\mathcal{C}_0$ nach einem treibenden Parameter λ ausgegangen, wie sie in 2.2.1. beschrieben ist. Eine Abhängigkeit der als räumlich konstant angenommenen Gleichgewichtsdichte ρ_0 und der Form der Plasmaoberfläche von λ wird ausgeschlossen. λ soll dabei so gewählt sein, daß gilt

$$\gamma^2(\lambda=\lambda_c) = 0 \qquad \text{und} \qquad d\gamma^2/d\lambda\Big|_{\lambda=\lambda_c} > 0 \quad , \tag{7.01}$$

wenn λ_c den kritischen Wert des treibenden Parameters an der marginalen Stabilitätsgrenze bezeichnet. Da im Rahmen der linearen Entwicklung (siehe Kapitel 2) die Quadrate der Anwachsraten γ in niedrigster Ordnung proportional zu $\tau = \lambda - \lambda_c$ waren ($\gamma^2 = \gamma_1^2 \tau$), erhielt man dort für die Zeitableitung einer Störgröße f

$$\partial f/\partial t = \gamma f \sim \sqrt{|\tau|}\, f \quad .$$

Dies legt in /8, 9/ die Einführung einer "langsamen" Zeit

$$T := t\,\sqrt{|\tau|} \tag{7.02}$$

nahe, welche bewirkt, daß auf der neuen Zeitskala T die Einstellzeiten des Systems bei Annäherung an die marginale Stabilitätsgrenze nicht beliebig anwachsen. Damit erhält man für Zeitableitungen die Skalierung

$$\partial/\partial T = \sqrt{|\tau|}^{-1}\,\partial/\partial t \quad .$$

Führt man nun einen formalen Entwicklungsparameter ε ein mit der Eigenschaft, daß λ gegen λ_c geht für ε ---> 0, und nimmt für die zeitabhängigen Störungen des Gleichgewichts und $\tau = \lambda - \lambda_c$ Entwicklungen der Form

$$\tilde{\rho} - \rho_0 = \varepsilon\,\tilde{\rho}_1 + \dots$$

$$\tilde{\underline{B}} - \underline{B}_0 = \varepsilon\,\tilde{\underline{B}}_1 + \varepsilon^2\,\tilde{\underline{B}}_2 + \dots$$

$$\tilde{p} - p_0 = \varepsilon\,\tilde{p}_1 + \varepsilon^2\,\tilde{p}_2 + \dots$$

$$\tilde{\underline{\Omega}} = \varepsilon\,\tilde{\underline{\Omega}}_1 + \varepsilon^2\,\tilde{\underline{\Omega}}_2 + \dots$$

$$\tau = \varepsilon\,\tau_1 + \varepsilon^2\,\tau_2 + \dots$$

an, so findet man

$$\tilde{\rho} = \rho_{00} + \varepsilon\,\tilde{\rho}_1 + \dots$$

$$\tilde{\underline{B}} = \underline{B}_{00} + \varepsilon\,(\tau_1\,\underline{B}_{01} + \tilde{\underline{B}}_1) + \varepsilon^2\,(\tau_2\,\underline{B}_{01} + \tau_1^2\,\underline{B}_{02} + \tilde{\underline{B}}_2) + \dots$$

$$\tilde{p} = p_{00} + \varepsilon\,(\tau_1\,p_{01} + \tilde{p}_1) + \varepsilon^2\,(\tau_2\,p_{01} + \tau_1^2\,p_{02} + \tilde{p}_2) + \dots$$

$$\tilde{\underline{\Omega}} = \varepsilon\,\tilde{\underline{\Omega}}_1 + \varepsilon^2\,\tilde{\underline{\Omega}}_2 + \dots \quad ,$$

wobei die Tilde zeitabhängige Größen kennzeichnet.
Stellt man das Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\underline{v}}$ als Zeitableitung eines Vektorfeldes $\tilde{\underline{\varphi}}$ dar

$$\tilde{\underline{v}} = \sqrt{|\tau|}\;\partial\tilde{\underline{\varphi}}/\partial T \quad , \tag{7.03}$$

setzt für $\tilde{\underline{\varphi}}$ ebenfalls eine Entwicklung der Form

$$\tilde{\underline{\varphi}} = \varepsilon \tilde{\underline{\varphi}}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\underline{\varphi}}_2 + \dots \qquad (7.04)$$

an, entwickelt die Randbedingungen um die Gleichgewichtsposition und geht in die Gleichungen (1.01) - (1.10) ein, so erhält man bezüglich Potenzen von ε eine Hierarchie von Gleichungen, die sukzessive zu lösen sind. Hieraus und aus den sich ergebenden Lösbarkeitsbedingungen erhält man dann das nichtlineare Verhalten der Störungen in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze.

Weitere Einzelheiten können /8, 9/ entnommem werden. Wir werden uns nach einigen Vorbemerkungen im folgenden darauf beschränken, die für unsere Konfiguration relevanten Gleichungen zusammenzustellen und zu lösen.

Um (7.01) zu erfüllen, wählen wir

$$\begin{aligned} \tau &:= (b_c - b) && \text{für } q = q_{c2} \\ \tau &:= (b - b_c) && \text{für } q = q_{c1} \end{aligned} \qquad (7.05)$$

und finden für die ersten Entwicklungskoeffizienten der Gleichgewichtsgrößen (3.01)

$$\underline{B}_{00} = B_{0\varphi}\,(\chi\,\underline{e}_\varphi + b_c\,\underline{e}_z) \quad , \quad \underline{j}_{00} = 2\,B_{0\varphi}/r_0\;\underline{e}_z \qquad (7.06)$$

$$\underline{B}^{\nu}_{00} = B_{0\varphi}\,(\chi^{-1}\,\underline{e}_\varphi + b_c\,\underline{e}_z) \quad , \quad p_{00} = B^2_{0\varphi}\,(1-\chi^2) .$$

Abschließend wollen wir noch den Zusammenhang zwischen dem Verschiebungsfeld $\tilde{\underline{\xi}}$ und dem mit (7.03) gegebenen Vektorfeld $\tilde{\underline{\varphi}}$ herstellen. Nach (2.01) ist

$$\sqrt{|\tau|}\;\partial\tilde{\underline{\xi}}(\underline{r},T)/\partial T = \tilde{\underline{v}}\,(\underline{r}+\tilde{\underline{\xi}}(\underline{r},T),T) \quad .$$

Damit und mit (7.03) findet man, zusammen mit der Forderung, daß für $\tilde{\underline{\varphi}} = \underline{0}$ auch $\tilde{\underline{\xi}}$ verschwinden soll, die nichtlineare Beziehung

$$\tilde{\underline{\varphi}}(\underline{x},T) = \tilde{\underline{\Phi}}(\underline{x}+\tilde{\underline{f}}(\underline{x},T),T) \quad . \tag{7.07}$$

Eine Taylorentwicklung um $\tilde{\underline{f}} = \underline{0}$ liefert

$$\tilde{\underline{\varphi}} = \tilde{\underline{\Phi}} + \underline{f}\cdot\nabla\tilde{\underline{\Phi}} + \tfrac{1}{2}\,\tilde{\underline{f}}\,\tilde{\underline{f}} : \nabla\nabla\,\tilde{\underline{\Phi}} + \ldots \quad . \tag{7.08}$$

Setzt man für $\tilde{\underline{f}}$ eine zu (7.04) analoge Entwicklung

$$\tilde{\underline{\varphi}} = \varepsilon\,\tilde{\underline{f}}_1 + \varepsilon^2\tilde{\underline{f}}_2 + \ldots \tag{7.09}$$

an, so findet man

$$\tilde{\underline{f}}_1 = \tilde{\underline{\Phi}}_1 \quad , \quad \tilde{\underline{f}}_2 = \tilde{\underline{\Phi}}_2 + \tfrac{1}{2}\,\tilde{\underline{\Phi}}_1\cdot\nabla\tilde{\underline{\Phi}}_1 \quad . \tag{7.10}$$

7.2. Die Entwicklungsgleichungen niedrigster Ordnung (ε^1)

Mit den Ansätzen

$$\underline{\tilde{\varphi}}_1(\underline{x},T) = A_1(T)\,\underline{\varphi}_1(\underline{x})$$
$$\underline{\tilde{\mathfrak{A}}}_1(\underline{x},T) = A_1(T)\,\underline{\mathfrak{A}}_1(\underline{x}) \qquad (7.11)$$

und den im Anhang gegebenen Operatoren lauten die Entwicklungsgleichungen niedrigster Ordnung

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\varphi}_1) = \underline{0}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}_1) = \underline{0} \qquad (7.12)$$
$$\nabla \cdot \underline{\mathfrak{A}}_1 = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_1) + \underline{\mathfrak{B}}_{00} \cdot \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1) = \underline{\mathfrak{B}}^{v}_{00} \cdot (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}_1) \qquad \text{auf } S_{00}$$
$$\underline{n}_{00} \times \underline{\mathfrak{A}}_1 = -(\underline{n}_{00} \cdot \underline{\varphi}_1)\,\underline{\mathfrak{B}}^{v}_{00} \qquad \text{auf } S_{00} \qquad (7.13)$$
$$\underline{n}_{00} \times \underline{\mathfrak{A}}_1 = \underline{0} \qquad \text{auf } \mathcal{C}_{00} .$$

Da wir die m = n = 1 Kink - Mode betrachten wollen, setzen wir an:

$$\underline{\varphi}(\underline{x}) = \underline{\varphi}_1^{m,k}(x)\,\exp(im\varphi + ikz)$$
$$\underline{\mathfrak{A}}_1(\underline{x}) = \underline{\mathfrak{A}}_1^{m,k}(x)\,\exp(im\varphi + ikz)$$
$$k = 2\pi n/L \quad , \quad m = 1 \quad , \quad n = 1 .$$

Für den vorliegenden Fall werden wir jetzt zunächst zeigen, daß aus der Gleichung $\underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\varphi}_1) = \underline{0}$ folgt $\mathrm{div}(\underline{\varphi}_1) = 0$. Ausgehend von $\underline{0} = \underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\chi})$ erhält man mit (A.1) - (A.5)

$$0 = \underline{B}_{00} \cdot \underline{F}_{00}(\underline{x}) =$$

$$\underline{B}_{00} \cdot \left\{ \underline{j}_{00} \times \underline{B}_{10}(\underline{x}) + \left(\nabla \times \underline{B}_{10}(\underline{x})\right) \times \underline{B}_{00} - \nabla p_{10}(\underline{x}) \right\} .$$

Die einzelnen Summanden können folgendermaßen umgeformt werden:

$$\underline{B}_{00} \cdot \left\{ \left(\nabla \times \underline{B}_{10}(\underline{x})\right) \times \underline{B}_{00} \right\} = \left(\nabla \times \underline{B}_{10}(\underline{x})\right) \cdot \left(\underline{B}_{00} \times \underline{B}_{00}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\underline{B}_{00} \cdot \left\{ \underline{j}_{00} \times \underline{B}_{10}(\underline{x}) \right\} &= - \underline{B}_{10}(\underline{x}) \cdot \left(\underline{j}_{00} \times \underline{B}_{00} \right) \\
&= - \left(\nabla \times [\underline{x} \times \underline{B}_{00}]\right) \cdot \nabla p_{00} \\
&= - \nabla \cdot \left([\underline{x} \times \underline{B}_{00}] \times \nabla p_{00} \right) + [\underline{x} \times \underline{B}_{00}] \cdot (\nabla \times \nabla p_{00}) \\
&= - \nabla \cdot \left(\underline{B}_{00} (\underline{x} \cdot \nabla p_{00}) - \underline{x} \left(\underline{B}_{00} \cdot \nabla p_{00} \right) \right) \\
&= - \nabla \cdot \left(\underline{B}_{00} (\underline{x} \cdot \nabla p_{00}) - \underline{x} \left(\underline{B}_{00} \cdot [\underline{j}_{00} \times \underline{B}_{00}] \right) \right) \\
&= - (\underline{x} \cdot \nabla p_{00}) \nabla \cdot \underline{B}_{00} - \underline{B}_{00} \cdot \nabla \left(\underline{x} \cdot \nabla p_{00} \right) \\
&= - \underline{B}_{00} \cdot \nabla \left(\underline{x} \cdot \nabla p_{00} \right)
\end{aligned}$$

$$\underline{B}_{00} \cdot \left(- \nabla p_{10}(\underline{x}) \right) = \underline{B}_{00} \cdot \nabla \left(\underline{x} \cdot \nabla p_{00} \right) + 5/3 \, \underline{B}_{00} \cdot \nabla \left(p_{00} \, \nabla \cdot \underline{x} \right)$$

Wir finden also

$$0 = \underline{B}_{00} \cdot \underline{F}_{00}(\underline{\chi}) = 5/3\, \underline{B}_{00} \cdot \nabla\left(p_{00} \nabla \cdot \underline{\chi}\right) .$$

Mit der Gleichgewichtsbeziehung $\underline{B}_{00} \cdot \nabla p_{00} = 0$ folgt:

$$0 = \underline{B}_{00} \cdot \nabla\left(\nabla \cdot \underline{\chi}\right) ;$$

und mit

$$\underline{\chi}(\underline{r}) = \underline{\chi}^{m,k}(x)\, \exp(im\varphi + ikz)$$

erhält man:

$$0 = \left(m + b_c\, k r_0\right) \nabla \cdot \underline{\chi} = \left(m + b_c \hat{\varkappa}\right) \nabla \cdot \underline{\chi} ,$$

woraus für $m + b_c \hat{\varkappa} = m + nq_c \neq 0$ die Behauptung folgt. Verlangt man, daß $\underline{\chi}$ stetig von q abhängen soll, so kann man das Verschwinden der Divergenz von $\underline{\chi}$ auch für $q = -m/n$ annehmen. Für $m = n = 1$ und $\underline{\chi} = \underline{\varphi}_1$ erhalten wir die entsprechende Aussage für den von uns betrachteten Fall

Wir haben also gezeigt, daß die marginale Kink - Mode für den Fall kompressibler Plasmen die Gleichung $\mathrm{div}(\underline{\varphi}_1) = 0$ automatisch erfüllt. Dies bedeutet, daß man dieselbe marginale Kink - Mode erhält (in den Gleichungen (4.09) - (4.11) ist lediglich im kompressiblen Fall $r_0\, p_{10}^{m,k}/B_{0\vartheta}^2$ durch $-2\varkappa \underline{f}_{0r}^{m,k}$ zu ersetzen), unabhängig davon, ob ein kompressibles oder ein inkompressibles Plasma betrachtet wird.

Mit (7.10) und dem Ansatz

$$\underline{\tilde{f}}_1(\underline{r}, T) = A_1(T)\, \underline{f}_1(\underline{r}) \qquad (7.14)$$

bedeutet dieses Ergebnis, daß die in Abschnitt 4.2. und Abschnitt 4.3. (für den inkompressiblen Fall) gefundene marginale Lösung auch das Gleichungssystem (7.12) - (7.13) befriedigt, wenn man in den Abschnitten 4.2. und 4.3. $\underline{f}_0$ durch $\underline{\varphi}_1$ und $\underline{a}_0$ durch $\underline{a}_1$ ersetzt. Damit ist eine Lösung von (7.12) zu den Randbedingungen (7.13) bekannt. Wir formulieren die Ergeb-

nisse in der neuen Bezeichnungsweise und erhalten

$$\varphi_{1r}(\underline{x}) = \varphi_{1r}^{1,K}(u)\cos h$$

$$\varphi_{1\varphi}(\underline{x}) = i\varphi_{1\varphi}^{1,K}(u)\sin h \qquad (7.15)$$

$$\varphi_{1z}(\underline{x}) = i\varphi_{1z}^{1,K}(u)\sin h$$

$$h := \varphi + Kz \qquad (7.16)$$

$$\varphi_{1r}(u) = C_1\left\{J_1'(u) + \Theta_1 J_1(u)/u\right\}$$

$$\varphi_{1\varphi}^{1,K}(u) = iC_1\left\{\Theta_1 J_1'(u) + J_1(u)/u\right\} \qquad (7.17)$$

$$\varphi_{1z}^{1,K}(u) = -iC_1\left(\Theta_1^2 - 1\right)^{1/2} J_1(u)$$

mit

$$u := \left(\Theta_1^2 - 1\right)^{1/2} \varkappa x \qquad (7.18)$$

und

$$\Theta_1 := \frac{2}{1 + q_{c2}} \qquad \text{für} \quad q_c = q_{c1} \text{ und } q_c = q_{c2}\,! \qquad (7.19)$$

(Nach den Gleichungen (4.61) und (4.62) ist an der marginalen Grenze q_{c1} das selbe Argument zu nehmen wie an der Grenze q_{c2}). Die Konstante C_1 in (7.17) wird durch die Normierungsforderung

$$\left(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1\right) = 1 \qquad (7.20)$$

festgelegt, und man erhält:

$$C_1 = r_0^{-3/2}\left(\frac{\varkappa}{2\pi^2}\right)^{1/2}\left\{\int_0^1 \left\{\left(\varphi_{1r}^{1,K}\right)^2 + \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\right)^2 + \left(i\varphi_{1z}^{1,K}\right)^2\right\} x\,dx\right\}^{-1/2} \qquad (7.21)$$

Weiterhin ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}l_{1z}(\underline{r}) &= \mathcal{O}l_{1z}^{\lambda,K}(\varkappa,x)\,\cos h \\
\mathcal{O}l_{1\varphi}(\underline{r}) &= \mathcal{O}l_{1\varphi}^{\lambda,K}(\varkappa,x)\,\cos h \\
\mathcal{O}l_{1r}(\underline{r}) &= \mathcal{O}l_{1r}^{\lambda,K}(\varkappa,x)\,\sin h
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}l_{1z}^{\lambda,K}(\varkappa,x) &= B_{o\varphi}\,\varphi_{1r}^{\lambda,K}\big|_{S_{oo}}\,F_1(\varkappa,x) \\
\mathcal{O}l_{1\varphi}^{\lambda,K}(\varkappa,x) &= (\varkappa x)^{-1}\,\mathcal{O}l_{1z}^{\lambda,K}(\varkappa,x) + \left(i\,\psi_1^{\lambda,K}(\varkappa,x)\right)' \\
\mathcal{O}l_{1r}^{\lambda,K}(\varkappa,x) &= (\varkappa x)^{-1}\,i\,\psi_1^{\lambda,K}(\varkappa,x) + \left(\mathcal{O}l_{1z}^{\lambda,K}(\varkappa,x)\right)' \\
\psi_1^{\lambda,K}(\varkappa,x) &= i\,(1+q_c)\,B_{o\varphi}\,\varphi_{1r}^{\lambda,K}\big|_{S_{oo}}\,\frac{G_1(\varkappa,x)}{\varkappa}
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

mit

$$
G_m(\varkappa,x) := \frac{I_m(|\varkappa|x)\,K_m'(|\varkappa|x_w) - K_m(|\varkappa|x)\,I_m'(|\varkappa|x_w)}{I_m'(|\varkappa|)\,K_m'(|\varkappa|x_w) - K_m'(|\varkappa|)\,I_m'(|\varkappa|x_w)} \tag{7.27}
$$

$$
F_m(\varkappa,x) := \frac{I_m(|\varkappa|x)\,K_m(|\varkappa|x_w) - K_m(|\varkappa|x)\,I_m(|\varkappa|x_w)}{I_m(|\varkappa|)\,K_m(|\varkappa|x_w) - K_m(|\varkappa|)\,I_m(|\varkappa|x_w)} \tag{7.28}
$$

$$
F_m'(\varkappa,x) := \frac{\partial F_m}{\partial(|\varkappa|x)}\,, \qquad G_m'(\varkappa,x) := \frac{\partial G_m}{\partial(|\varkappa|x)}\,. \tag{7.29}
$$

Aus der Druckrandbedingung erhalt man wieder die Gleichungen (4.29) und (4.30) zur Bestimmung des kritischen Wertes b_e des treibenden Parameters.

7.3. Die Entwicklungsgleichungleichungen zweiter Ordnung (ε^2)

Nach /9/ erhält man für $\underline{\tilde{\varphi}}_2$ die Gleichung

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\tilde{\varphi}}_2) = \tau_1\left(\rho_{00}\,\partial^2\underline{\tilde{\varphi}}_1/\partial T^2 + \underline{\mathbb{F}}_{01}(\underline{\tilde{\varphi}}_1)\right) - 1/2\;\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\tilde{\varphi}}_1, \underline{\tilde{\varphi}}_1) \tag{7.30}$$

und den Ansatz

$$\underline{\tilde{\varphi}}_2(\underline{r}, T) = A_2(T)\,\underline{\varphi}_{20}(\underline{r}) + \tau_1 A_1(T)\,\underline{\varphi}_{21}(\underline{r}) + 1/2\,A_1^2(T)\,\underline{\varphi}_{22}(\underline{r}) \tag{7.31}$$

mit

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\varphi}_{20}) = \underline{0} \quad .$$

Multipliziert man die Gleichung (7.30) mit $\underline{\tilde{\varphi}}_1$, integriert über das Plasmavolumen und berücksichtigt die in /9/ gegebenen Randbedingungen, so läßt sich $\underline{\tilde{\varphi}}_2$ eliminieren und man erhält die Lösbarkeitsbedingung

$$\tau_1\left(\partial^2 A_1/\partial T^2 - \gamma_T^2 A_1\right) = \left(3\delta_T/2\right) A_1^2 \quad . \tag{7.31}$$

Dabei ist γ_T^2 durch den (4.32) entsprechenden Ausdruck

$$\gamma_T^2 = \frac{-2\varkappa(1+q_c)B_{0\varphi}^2}{\rho_0 r_0^2}\left\{1 + \frac{\dfrac{2}{1+q_c}\displaystyle\int_0^1 \varphi_{1r}^{1,\kappa}\, i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\, x\,dx + G_1(\varkappa,1)\,\varkappa^{-1}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\big|_{S_{00}}\right)^2}{\displaystyle\int_0^1 \left\{\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2 + \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^2 + \left(i\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)^2\right\} x\,dx}\right\} \tag{7.32}$$

gegeben. δ_T ist nach /9/ durch einen Ausdruck dritter Ordnung in $\underline{\varphi}_1$ gegeben und läßt sich in der Form

$$\delta_T = (3\rho_{00})^{-1}\left\{(\underline{\varphi}_1, \underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1)) + \int_{S_{00}} T(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1)\,d\sigma\right\}$$

schreiben. Unabhängig von der speziellen Gestalt von $T(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1)$ verschwindet δ_T. Denn sowohl in dem Integral über das ungestörte Plasmavolumen als auch in dem Integral über die ungestörte Plasmaoberfläche treten entsprechend (7.15) nur Terme der Form

$\cos(h)$, $\cos^3(h)$, $\sin(h)$, $\sin^3(h)$, $\cos^2(h)\cdot\sin(h)$ und $\cos(h)\cdot\sin^2(h)$ auf $(h = \varphi + kz)$.

Das Verschwinden von δ_T bedeutet, daß in der zweiten Ordnung der nichtlinearen Entwicklung keine nichtlineare Amplitudengleichung für $A_1(T)$ erhalten wird. Diese erhält man erst in dritter Ordnung in ε. Um die Gleichung (7.31) für $\delta_T = 0$ zu erfüllen, setzen wir $\tau_1 = 0$, das heißt wir finden

$$T = \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \dots \quad . \tag{7.33}$$

Mit $\tau_1 = 0$ können wir auf die Bestimmung der Größen mit dem Index 21 verzichten. Für die Größen mit dem Index 20 ergeben sich nach /9/ Gleichungen, die mit denen zur Bestimmung der marginalen Mode identisch sind. Das heißt, es ist

$$\underline{\varphi}_{20} = \underline{\varphi}_1 \quad , \quad \underline{\mathfrak{A}}_{20} = \underline{\mathfrak{A}}_1 \quad , \quad \dots \quad .$$

Die verbeibenden Gleichungen in zweiter Ordnung in ε lauten entsprechend /9/ wie folgt:
Im Plasma hat man

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\varphi}_{22}) = -\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1) \tag{7.34}$$

und im Vakuum

$$\nabla \times \left(\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}_{22}\right) = \underline{0}$$
$$\nabla \cdot \underline{\mathfrak{A}}_{22} = 0 \quad . \tag{7.35}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\overline{\overline{\Pi}}^{\ell} = \overline{\overline{\Pi}}^{r} \qquad \text{auf } S_{00} \tag{7.36}$$

mit

$$\overline{\overline{\Pi}}^{\ell} = \left\{ \underline{\underline{P}}_{10}(\underline{\varphi}_{22}) + \underline{\underline{E}}_{00} \cdot \underline{\underline{E}}_{10}(\underline{\varphi}_{22}) - \underline{\underline{E}}^{v}_{00} \cdot (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}_{22}) \right\} \frac{r_0^2}{B^2_{0\varphi}} \tag{7.37}$$

$$\overset{\approx}{\pi}^{v} = \Big\{ - \mathbb{p}_1(\underline{\varphi}_1, \mathbb{p}_{10}(\underline{\varphi}_1)) - \underline{B}_{oo} \cdot \underline{B}_1(\underline{\varphi}_1, \underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1)) - \left(\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right)^2 + \left(\nabla \times \underline{\mathfrak{a}}_1\right)^2 + \tag{7.38}$$
$$- 2\underline{\varphi}_1 \cdot \nabla \left\{ \mathbb{p}_{10}(\underline{\varphi}_1) + \underline{B}_{oo} \cdot \underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1) - \underline{B}^{v}_{oo} \cdot (\nabla \times \underline{\mathfrak{a}}_1) \right\} +$$
$$- \underline{\varphi}_1 \underline{\varphi}_1 : \nabla\nabla \left(p_{oo} + B^2_{oo}/2 - B^{v\,2}_{oo}/2 \right) \Big\} \frac{r_o^2}{B^2_{o\varphi}}$$

und

$$\underline{\beta}^{\ell} = \underline{\beta}^{\tau} \qquad \text{auf } S_{oo} \tag{7.39}$$

mit

$$\underline{\beta}^{\ell} = \frac{r_o}{B_{o\varphi}} \left[\underline{n}_{oo} \times \underline{\mathfrak{a}}_{22} + \underline{n}_o \cdot \underline{\varphi}_{22}\, \underline{B}^{v}_{oo} \right] \tag{7.40}$$

$$\underline{\beta}^{\tau} = \frac{-r_o}{B_{o\varphi}} \Big[\Big\{ \frac{1}{2}\, \underline{n}_{oo} \cdot (\underline{\varphi}_1 \cdot \nabla \underline{\varphi}_1) + \underline{n}_1 \cdot \underline{\varphi}_1 \Big\} \underline{B}^{v}_{oo} + \underline{n}_{oo} \cdot \underline{\varphi}_1 (\underline{\varphi}_1 \cdot \nabla \underline{B}^{v}_{oo}) + \tag{7.41}$$
$$\Big\{ \underline{n}_1 \times \underline{\mathfrak{a}}_1 + \underline{n}_{oo} \times (\underline{\varphi}_1 \cdot \nabla) \underline{\mathfrak{a}}_1 + \underline{n}_{oo} \cdot \underline{\varphi}_1 (\nabla \times \underline{\mathfrak{a}}_1) \Big\} \Big]$$

sowie

$$\underline{n}_{oo} \times \underline{\mathfrak{a}}_{22} = \underline{0} \qquad \text{auf } \tau_{oo} \;. \tag{7.42}$$

Dabei wurde angesetzt

$$\underline{\tilde{\mathfrak{a}}}_{22}(\underline{r}, T) = 1/2\; A_1^2(T)\; \underline{\mathfrak{a}}_{22}(\underline{r}) \tag{7.43}$$

$$\underline{\tilde{\varphi}}_{22}(\underline{r}, T) = 1/2\; A_1^2(T)\; \underline{\varphi}_{22}(\underline{r}) \tag{7.44}$$

$$\underline{\tilde{\xi}}_{22}(\underline{r}, T) = 1/2\; A_1^2(T)\; \underline{\tilde{\xi}}_{22}(\underline{r}) \;. \tag{7.45}$$

Der in (7.41) auftretende Normalenvektor $\underline{n}_1$ wird im nächsten Abschnitt angegeben.

Die weitere Vorgehensweise wird nun wie folgt sein: Zunächst

werden wir die Größen, die durch die Lösungen erster Ordnung ($\underline{\varphi}_1$ und $\underline{\sigma}_1$) bestimmt sind, das heißt $\underline{G}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1)$ und die rechten Seiten (7.38) und (7.41) der Randbedingungen (7.36) und (7.39) berechnen und sehen, daß hierbei nur von φ und z unabhängige Terme und Terme mit cos2h = cos2(φ+kz) auftreten. Dies legt für $\underline{\varphi}_{22}$ und $\underline{\sigma}_{22}$ die Ansätze

$$\underline{\sigma}_{22}(\underline{r}) = \underline{\sigma}_{22}^{0,0}(x) + \underline{\sigma}_{22}^{2,2k}(x)\exp(i2h) \tag{7.46}$$

$$\underline{\varphi}_{22}(\underline{r}) = \underline{\varphi}_{22}^{0,0}(x) + \underline{\varphi}_{22}^{2,2k}(x)\exp(i2h) \tag{7.47}$$

nahe. (Die Gleichungen für $\underline{\varphi}_{22}$ und $\underline{\sigma}_{22}$ sind lineare Gleichungen, dehalb ist ein komplexer Ansatz möglich; später werden nur die Realteile als Lösung genommen werden.)
Für den Ansatz (7.47) werden wir zeigen, daß

$$\operatorname{div}\underline{\varphi}_{22}(\underline{r}) = \operatorname{div}\underline{\varphi}_{22}^{0,0}(x) \tag{7.48}$$

beziehungsweise

$$\operatorname{div}\left(\underline{\varphi}_{22}^{2,2k}(x)\exp(2ih)\right) = 0 \tag{7.49}$$

gilt. Unter diesen Voraussetzungen werden wir dann die Gleichung (7.34) lösen. Anschließend werden wir eine Lösung für (7.35) zu der Randbedingung (7.42) angeben und die linken Seiten (7.37) und (7.40) der Randbedingungen (7.36) und (7.39) auswerten. Die Randbedingungen (7.36) und (7.39) legen die noch freien Konstanten und damit die Lösungen $\underline{\varphi}_{22}$ und $\underline{\sigma}_{22}$ eindeutig fest.

In Kapitel 8 werden wir schließlich die sich nach /9/ in dritter Ordnung in ε ergebende Lösbarkeitsbedingung, die eine nichtlineare Gleichung für die Amplitude $A_1(T)$ liefert, angeben und mit den Lösungen aus Abschnitt 7 auswerten.

7.4. Die Normalenvektoren an die Plasmaoberfläche

Mit $\underline{r}_*(u,v,t) = \underline{r}_{00}(u,v) + \bar{\underline{f}}(\underline{r}_{00}(u,v),t)$ sei eine Beschreibung der gestörten Plasmaoberfläche S gegeben. Ein auf S senkrechtes Vektorfeld $\underline{N}$ erhält man dann gemäß

$$\tilde{\underline{N}} = \partial\tilde{\underline{r}}/\partial u \times \partial\tilde{\underline{r}}/\partial v \quad . \tag{7.50}$$

Die Entwicklungskoeffizienten von $\underline{N}$ bezüglich ε lauten nach /9/

$$\tilde{\underline{N}}\Big|_{\underline{r}_{00}+\underline{f}} = \underline{N}_{00}\Big|_{\underline{r}_{00}} + \varepsilon A_1(\tau)\underline{N}_1\Big|_{\underline{r}_{00}} + \\ + \varepsilon^2\left\{A_2(\tau)\underline{N}_{20} + \tau_1 A_1(\tau)\underline{N}_{21} + \tfrac{1}{2}A_1^2(\tau)\underline{N}_{22}\right\}\Big|_{\underline{r}_{00}} \tag{7.51}$$

mit

$$\underline{N}_{00} = \partial\underline{r}_{00}/\partial u \times \partial\underline{r}_{00}/\partial v \tag{7.52}$$

$$\underline{N}_1 = \frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial v}\cdot\nabla\underline{f}_1\right) - \frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial v} \times \left(\frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial u}\cdot\nabla\underline{f}_1\right) \tag{7.53}$$

$$\underline{N}_{22} = \frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial v}\cdot\nabla\underline{f}_{22}\right) - \frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial v} \times \left(\frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial u}\cdot\nabla\underline{f}_{22}\right) + \\ + 2\left(\frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial u}\cdot\nabla\underline{f}_1\right) \times \left(\frac{\partial\underline{r}_{00}}{\partial v}\cdot\nabla\underline{f}_1\right) \quad . \tag{7.54}$$

Auf die Angabe von $\underline{N}_{20}$ und $\underline{N}_{21}$ wurde hier verzichtet, da sie für die folgenden Rechnungen nicht benötigt werden. Für die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten des sich aus $\underline{N}$ gemäß $\underline{n} = \underline{N}/|\underline{N}|$ ergebenden Normalenvektors findet man dann

$$\underline{n}_{00} = \underline{N}_{00}/|\underline{N}_{00}| \tag{7.55}$$

$$\underline{n}_1 = \left(\underline{N}_1 - \underline{n}_{00}\cdot\underline{N}_1\,\underline{n}_{00}\right)/|\underline{N}_{00}| \tag{7.56}$$

$$\underline{n}_{22} = \left(\underline{N}_{22} - \underline{n}_{00}\cdot\underline{N}_{22}\,\underline{n}_{00}\right)/|\underline{N}_{00}| - 2\,\underline{n}_{00}\cdot\underline{N}_1\,\underline{N}_1/|\underline{N}_{00}|^2 + \\ + \left[3(\underline{n}_{00}\cdot\underline{N}_1)^2 - \underline{N}_1\cdot\underline{N}_1\right]\underline{n}_{00}/|\underline{N}_{00}|^2 \quad . \tag{7.57}$$

In dem von uns betrachteten Fall ist $\underline{r}_{00}(u,v)$ ein Zylindermantel, das heißt, wir können mit der Parameterwahl $u = r_0\varphi$ und $v = z$

$$\underline{r}_{00}(u,v) = \varphi r_0 \underline{e}_\varphi + z \underline{e}_z$$

setzten. Mit

$$\underline{n}_{00} = \underline{N}_{00} = \underline{e}_r$$

erhält man

$$\underline{N}_1 = r_0^{-1}\left[-(\varphi_{1r}^{1,K})^{\cdot}\cos h\,\underline{e}_r + \chi^{-1}\left(\varphi_{1r}^{1,K} + i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\right)\sin h\,\underline{e}_\varphi + \right. \\ \left. + \varkappa\varphi_{1r}^{1,K}\sin h\,\underline{e}_z\right] \tag{7.58}$$

und

$$\underline{n}_1 = r_0^{-1}\left\{\chi^{-1}\left(\varphi_{1r}^{1,K} + i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\right)\underline{e}_\varphi + \varkappa\varphi_{1r}^{1,K}\underline{e}_z\right\}\sin h \; . \tag{7.59}$$

5. Berechnung von $\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_{-1}, \underline{\varphi}_{1})$ und der rechten Seiten der Randbedingungen (7.36) und (7.39)

Zunächst geben wir zusammenfassend einige im folgenden mehrfach benötigte Ausdrücke an. Entsprechend den im Anhang gegebenen Definitionen findet man mit (7.06) und (7.15) - (7.16) sowie mit $\operatorname{div}\underline{\varphi}_{-1} = 0$

$$\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1}) = \frac{\mathcal{B}_{0\varphi}}{r_0}(1+\varrho_c)\, i\underline{\varphi}_{1} \tag{7.60}$$

$$\underline{\mathbb{B}}_{1}(\underline{\varphi}_{-1}, \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1})) = -\frac{\mathcal{B}_{0\varphi}}{r_0^2}(1+\varrho_c)\left\{(\varphi_{1r}^{1\kappa}\, i\varphi_{1\varphi}^{1\kappa})^{\cdot}\,\underline{e}_{\varphi} + \chi^{-1}(\chi\varphi_{1r}^{1\kappa}\, i\varphi_{1z}^{1\kappa})^{\cdot}\,\underline{e}_{z}\right\} \tag{7.61}$$

$$\mathfrak{p}_{10}(\underline{\varphi}_{1}) = 2\frac{\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{r_0}\,\chi\varphi_{1r}^{1\kappa}\cos h \tag{7.62}$$

$$\mathfrak{p}_{1}(\underline{\varphi}_{-1}, \mathfrak{p}_{10}(\underline{\varphi}_{1})) = 2\frac{\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{r_0^2}(-\varphi_{1r}^{1\kappa})(\chi\varphi_{1r}^{1\kappa})^{\cdot} \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}_{1}\cdot\nabla\,\underline{\varphi}_{1} = (2\chi r_0)^{-1}\Big\{&\Big(\big[(\chi\varphi_{1r}^{1\kappa}\varphi_{1r}^{1\kappa})^{\cdot} - (i\varphi_{1\varphi}^{1\kappa})^2\big] - \big[(\varphi_{1r}^{1\kappa})^2 - (i\varphi_{1\varphi}^{1\kappa})^2\big]\cos 2h\Big)\underline{e}_{r}\\ &+ \chi\big[\varphi_{1r}^{1\kappa}(i\varphi_{1\varphi}^{1\kappa})^{\cdot} - (\varphi_{1r}^{1\kappa})^{\cdot}\, i\varphi_{1\varphi}^{1\kappa}\big]\sin 2h\,\underline{e}_{\varphi}\\ &+ \big[\chi\varphi_{1r}^{1\kappa}(i\varphi_{1z}^{1\kappa})^{\cdot} - (\chi\varphi_{1r}^{1\kappa})^{\cdot}\, i\varphi_{1z}^{1\kappa}\big]\sin 2h\,\underline{e}_{z}\Big\},\end{aligned} \tag{7.64}$$

wobei der Punkt wieder die Ableitung nach x bedeutet und

$$i\underline{\varphi}_{1} = -\varphi_{1r}^{1\kappa}\sin h\,\underline{e}_{r} + i\varphi_{1\varphi}^{1\kappa}\cos h\,\underline{e}_{\varphi} + i\varphi_{1z}^{1\kappa}\cos h\,\underline{e}_{z}$$

ist.

Für

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_{-1}, \underline{\varphi}_{1}) = \underline{j}_{00}\times\underline{\mathbb{B}}_{1}(\underline{\varphi}_{-1}, \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1})) - \underline{\mathcal{B}}_{00}\times\Big(\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{1}(\underline{\varphi}_{-1}, \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1}))\Big) +\\ -\nabla\mathfrak{p}_{1}(\underline{\varphi}_{-1}, \mathfrak{p}_{10}(\underline{\varphi}_{1})) + 2\left(\nabla\times\underline{\mathcal{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\right)\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\end{aligned} \tag{7.65}$$

findet man, da sich für den betrachteten Fall

$$\left(\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\right)\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{1}) = \underline{0}$$

ergibt,

$$\underline{\mathbb{G}}_{oo}(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_1)=\frac{B_{oy}^2}{r_o^3}\left\{2\left[\varphi_{1r}^{1k}(x\varphi_{1r}^{1k})^{\cdot}\right]^{\cdot}+(1+\eta_c)\left[3(\varphi_{1r}^{1k}+i\varphi_{1\varphi}^{1k})^{\cdot}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+x(\varphi_{1r}^{1k}+i\varphi_{1\varphi}^{1k})^{\cdot\cdot}+\mathcal{L}_c\left\{x^{-1}(x\varphi_{1r}^{1k}+i\varphi_{1z}^{1k})^{\cdot}\right\}^{\cdot}\right]\right\}\underline{e}_r \quad . \tag{7.66}$$

Also ist die Inhomogenität der Gleichung (7.34) allein durch winkelunabhängige Terme gegeben.

Die Auswertung der rechten Seiten (7.38) und (7.41) der Randbedingungen (7.36) und (7.39) ergibt (alle x-abhängigen Größen sind an der Stelle x = 1 zu nehmen) die folgenden Ausdrücke: Mit

$$\widetilde{\Pi}_o^r=-\left(2+Q_c^2\,\widetilde{G}_1(x,1)\right)\varphi_{1r}^{1k}(\varphi_{1r}^{1k})^{\cdot}-2Q_c\,\varphi_{1r}^{1k}+i\varphi_{1\varphi}^{1k}-$$
$$-Q_c^2\left[(i\varphi_{1\varphi}^{1k})^2+(i\varphi_{1z}^{1k})^2\right]/2+Q_c\left\{2\widetilde{G}_1(x,1)+\right. \tag{7.67}$$
$$\left.+Q_c\left[(1+x^2)\left(\widetilde{G}_1(x,1)\right)^2/2-(1+\widetilde{G}_1(x,1))\right]\right\}(\varphi_{1r}^{1k})^2$$

und

$$\widetilde{\Pi}_2^r=Q_c\left[\mathcal{L}_c\,\varphi_{1r}^{1k}+i\varphi_{1z}^{1k}-\varphi_{1r}^{1k}(i\varphi_{1\varphi}^{1k}+\mathcal{L}_c\,i\varphi_{1z}^{1k})^{\cdot}+\right.$$
$$+(\varphi_{1r}^{1k})^{\cdot}(i\varphi_{1\varphi}^{1k}+\mathcal{L}_c\,i\varphi_{1z}^{1k})\left.\right]+Q_c^2\left[\widetilde{G}_1(x,1)\,\varphi_{1r}^{1k}(\varphi_{1r}^{1k})^{\cdot}-\right. \tag{7.68}$$
$$\left.-\left\{(i\varphi_{1\varphi}^{1k})^2+(i\varphi_{1z}^{1k})^2\right\}/2\right]+\left[Q_c^2\left\{(1+x^2)\left(\widetilde{G}_1(x,1)\right)^2/2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\widetilde{G}_1(x,1)-3/2\right)\right\}+2\left(1+Q_c\widetilde{G}_1(x,1)\right)\right](\varphi_{1r}^{1k})^2$$

wobei

$$Q_c=1+\eta_c \tag{7.69}$$

$$\widetilde{G}_m(x,x)=x^{-1}G_m(x,x) \tag{7.70}$$

gesetzt wurde, gilt:

$$\widetilde{\Pi}^r=\widetilde{\Pi}_o^r+\widetilde{\Pi}_2^r\cos 2k \tag{7.71}$$

Mit

$$(\underline{e}_r \cdot \underline{\beta}_0^r) = 0 = (\underline{e}_r \cdot \underline{\beta}_2^r) \tag{7.72}$$

$$(\underline{e}_\varphi \cdot \underline{\beta}_0^r) = \left[5/4 + Q_c\,\tilde{G}_1(\varkappa,1)\right](\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^2 + 1/2\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}(\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^* - 1/4\,(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa})^2 \tag{7.73}$$

$$(\underline{e}_\varphi \cdot \underline{\beta}_2^r) = \left[\varkappa F_1'(\varkappa,1) - 1/4\right](\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^2 - \varphi_{1r}^{1,1\kappa}(\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^* + 1/4\,(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa})^2 \tag{7.74}$$

$$\begin{aligned}(\underline{e}_z \cdot \underline{\beta}_0^r) = {} & \left[\mathcal{L}_e/4 + Q_c\,G_1(\varkappa,1)\right](\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^2 + \mathcal{L}_e/2\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}(\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^* + \\ & + \left[F_1'(\varkappa,1) - Q_c\,\varkappa^{-1}\tilde{G}_1(\varkappa,1)\right]\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa} - \mathcal{L}_e/4\,(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa})^2\end{aligned} \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}(\underline{e}_z \cdot \underline{\beta}_2^r) = {} & \left[Q_c(1+\varkappa^2)\varkappa^{-1}\tilde{G}_1(\varkappa,1) - F_1'(\varkappa,1) - 5/4\,\mathcal{L}_e\right](\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^2 - \\ & - \mathcal{L}_e\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}(\varphi_{1r}^{1,1\kappa})^* - \left[F_1'(\varkappa,1) - Q_c\,\varkappa^{-1}\tilde{G}_1(\varkappa,1)\right]\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa} + \\ & + \mathcal{L}_e/4\,(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa})^2\end{aligned} \tag{7.76}$$

gilt

$$\underline{\beta}^r = \underline{\beta}_0^r + \underline{\beta}_2^r \cos 2k\,. \tag{7.77}$$

An (7.66), (7.71) und (7.77) sieht man, daß die Ansätze (7.46) und (7.47) berechtigt waren. Da $\underline{\mathbb{F}}_{00}$ ein linearer Operator ist, erhalten wir mit ihnen aus (7.34)

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}) = -\,\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1) \tag{7.78}$$

und

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}\left(\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\exp[i2k]\right) = \underline{0}\,. \tag{7.79}$$

7.6. Zur Lösung von (7.79) und (7.78)

Da die Gleichung (7.79) (wie in Abschnitt 7.2 gezeigt) $\mathrm{div}(\underline{\varphi}_{22}^{2,2k}\exp(i2h)) = 0$ impliziert, sind die Gleichungen (7.79) zur Bestimmung von $\underline{\varphi}_{22}^{2,2k}$ die selben, wie die zur Bestimmung der marginalen Mode $\underline{\varphi}_{a}^{1,k}$, wenn man dort setzt $\varphi \dashrightarrow 2\varphi$, $k \dashrightarrow 2k$ und $\varkappa \dashrightarrow 2\varkappa$. Da bei dieser Ersetzung das Argument der Besselfunktionen bei dem Übergang von $q_c < 0$ nach $q_c > 0$ von reellen Werten zu imaginären Werten wechselt, bekommt man für $\underline{\varphi}_{22}^{2,2k}$ die im Plasma nichtsinguläre Lösung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\varphi_{22_r}^{2,2k}\exp(i2h)\right] &= \varphi_{22_r}^{2,2k}\cos 2h \\
\mathrm{Re}\left[\varphi_{22_\varphi}^{2,2k}\exp(i2h)\right] &= i\varphi_{22_\varphi}^{2,2k}\sin 2h \\
\mathrm{Re}\left[\varphi_{22_z}^{2,2k}\exp(i2h)\right] &= i\varphi_{22_z}^{2,2k}\sin 2h
\end{aligned} \tag{7.79a}$$

mit

$q_c \le 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{22_r}^{2,2k} &= C_2\left\{\mathfrak{J}_2'(w) + 2\Theta_2\,\mathfrak{J}_2(w)/w\right\} \\
\varphi_{22_\varphi}^{2,2k} &= iC_2\left\{\Theta_2\mathfrak{J}_2'(w) + 2\,\mathfrak{J}_2(w)/w\right\} \\
\varphi_{22_z}^{2,2k} &= -iC_2\left\{\Theta_2^2-1\right\}^{1/2}\mathfrak{J}_2(w)
\end{aligned} \tag{7.80}$$

$$w := \left(\Theta_2^2-1\right)^{1/2} 2\varkappa x \tag{7.81}$$

$$\Theta_2 := (1+q_{c_2})^{-1} \qquad \text{für } q_c = q_{c_1} \text{ und } q_c = q_{c_2}!$$

und

$q_c \ge 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{22_r}^{2,2k} &= C_2\left\{I_2'(v) + 2\Theta_2 I_2(v)/v\right\} \\
\varphi_{22_\varphi}^{2,2k} &= iC_2\left\{\Theta_2 I_2'(v) + 2 I_2(v)/v\right\} \\
\varphi_{22_z}^{2,2k} &= iC_2\left(1-\Theta_2^2\right)^{1/2} I_2(v)
\end{aligned} \tag{7.82}$$

mit

$$\upsilon := \left(1-\Theta_2^2\right)^{1/2} 2\varkappa x \quad . \tag{7.83}$$

Die freie Konstante C_2 wird durch die Randbedingungen auf S_∞ festgelegt. Ihre Bestimmung erfolgt in Abschnitt 7.8.

Jetzt werden wir die Gleichung (7.78), die den winkelunabhängigen Anteil von $\underline{\varphi}_{22}$ bestimmt, also

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = -\underline{\mathbb{G}}_{00}\left(\underline{\varphi}_{11},\underline{\varphi}_{11}\right)$$

lösen. Die linke Seite dieser Gleichung ist mit (A.5) durch

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = \left[\underline{j}_{00}\times\underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right)+\left(\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right)\right)\times\underline{\mathbb{B}}_{00}-\nabla p_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right)\right]$$

gegeben. Mit

$$\mathcal{D}(x) = x^{-1}\left(x\,\varphi_{22\,r}^{0,0}\right)^{\cdot} = r_0\,\nabla\cdot\underline{\varphi}_{22}^{0,0} \tag{7.84}$$

und

$$\underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = -\frac{1}{r_0}\,\mathcal{D}(x)\,\underline{\mathbb{B}}_{00}$$

$$\underline{j}_{00}\times\underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = 2\,\frac{B_{0\varphi}^2}{r_0^2}\,x\,\mathcal{D}(x)\,\underline{e}_r$$

$$\left(\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right)\right)\times\underline{\mathbb{B}}_{00} = \frac{B_{0\varphi}^2}{r_0^2}\left\{\left(x^2+\ell_c^2\right)\mathcal{D}^{\cdot}(x)+2x\,\mathcal{D}(x)\right\}\underline{e}_r$$

$$\nabla p_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = \frac{B_{0\varphi}^2}{3r_0^2}\left\{-16x\,\mathcal{D}(x)+5\left(1-x^2\right)\mathcal{D}^{\cdot}(x)\right\}\underline{e}_r$$

findet man

$$\underline{\mathbb{F}}_{00}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = -\frac{2}{3}\,\frac{B_{0\varphi}^2}{r_0^2}\left\{\left(x^2-\alpha^2\right)\mathcal{D}(x)\right\}^{\cdot}\underline{e}_r \quad , \tag{7.85}$$

wobei

$$\alpha^2 := \left(5+3\ell_c^2\right)/2 \quad \geq \quad 5/2 \tag{7.86}$$

ist. Mit (7.86) erhalten wir also die inhomogene Gleichung

$$\left\{\left(x^2-\alpha^2\right)\mathcal{D}(x)\right\}^{\cdot} = \frac{3}{2r_0}\left\{2\left[\varphi_{1r}^{1K}\left(x\,\varphi_{1r}^{1K}\right)^{\cdot}\right]^{\cdot}+\left(1+q_c\right)\left[3\left(\varphi_{1r}^{1K}+i\,\varphi_{1\varphi}^{1K}\right)^{\cdot}+\right.\right.$$

$$+\chi\left(\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1M}\right)^{\cdot}+\mathcal{b}_c\left[\chi^{-1}\left(\chi\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1z}^{1M}\right)^{\cdot}\right]^{\cdot}\Big]\Big\}\,.$$

Durch Variation der Konstanten C der homogenen Lösung

$$\mathcal{D}(\chi)=C\left\{\chi^2-\alpha^2\right\}^{-1}$$

findet man

$$C(\chi)=\frac{2}{r_0}C_{01}+\frac{3}{2r_0}\Big\{2\varphi_{1r}^{1M}(\chi\varphi_{1r}^{1M})^{\cdot}+(1+q_c)\Big[2\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1M}+$$
$$+\chi\left(\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1M}\right)^{\cdot}+\mathcal{b}_c\chi^{-1}(\chi\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1z}^{1M})^{\cdot}\Big]\Big\}\,, \qquad (7.87)$$

da sich $\underline{\mathfrak{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1\cdot\underline{\varphi}_1)\cdot\underline{e}_r$ als Ableitung elementar integrieren läßt. Definiert man noch

$$\Gamma(\chi):=\frac{3}{2r_0}\Big\{(\chi\varphi_{1r}^{1M})^2+(1+q_c)\Big[(\chi^2\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1M})+\mathcal{b}_c(\chi\varphi_{1r}^{1M}\,i\,\varphi_{1z}^{1M})\Big]\Big\}\,, \qquad (7.88)$$

so erhält man aus Gleichung (7.84)

$$\left(\chi\varphi_{22r}^{0,0}\right)^{\cdot}=\chi\mathcal{D}(\chi)=\chi C(\chi)\left\{\chi^2-\alpha^2\right\}^{-1}$$
$$=\left(\frac{2}{r_0}C_{01}\chi+\Gamma^{\cdot}(\chi)\right)\left\{\chi^{-2}-\alpha^2\right\}^{-1}$$

und hieraus

$$\varphi_{22r}^{0,0}(\chi)=\chi^{-1}\Big\{\frac{1}{r_0}C_{01}\ln|\chi^2-\alpha^2|+\frac{1}{r_0}C_{00}+\int_0^{\chi}\frac{d\Gamma(t)/dt}{t^2-\alpha^2}\,dt\Big\}\,.$$

Wir fordern, daß die Lösung im Plasma nicht singulär sein soll. Dies bedingt

$$C_{00}=-C_{01}\ln\alpha^2\,,$$

und wir erhalten abschließend

$$\varphi_{22r}^{0,0}(\chi)=\frac{C_{01}}{r_0}\chi^{-1}\ln\left(1-\frac{\chi^2}{\alpha^2}\right)+\chi^{-1}\int_0^{\chi}\frac{d\Gamma(t)/dt}{t^2-\alpha^2}\,dt\,. \qquad (7.89)$$

Die Konstante C_{01} bestimmt sich aus den Randbedingungen auf S_e und wir werden sie in Abschnitt 7.8 bestimmen.

Die Funktionen $\varphi_{22\varphi}^{0,0}(\chi)$ und $\varphi_{22z}^{0,0}(\chi)$ bleiben unbestimmt. Da sie, wie wir sehen werden, in den weiteren Rechnungen nicht auftre-

ten, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_{22\,y}^{0,0}(x) = 0$ und $\varphi_{22\,z}^{0,0}(x) = 0$ annehmen.

7.7. Zur Bestimmung des Vektorpotentials $\underline{\alpha}_{22}$

Mit dem Ansatz (7.46) folgen aus (7.35) für $\underline{\alpha}_{22}^{2,2k}$ die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{x}\left(x\,\alpha_{22z}^{2,2k\,\cdot}\right)^{\cdot} + \frac{4}{x^2}\,\alpha_{22z}^{2,2k} + 4\varkappa^2\,\alpha_{22z}^{2,2k} \\
0 &= \left(\frac{4}{x^2}+4\varkappa^2\right)\alpha_{22\varphi}^{2,2k} - \frac{1}{x}\left(x\,\alpha_{22\varphi}^{2,2k\,\cdot}\right)^{\cdot} + \frac{1}{x^2}\,\alpha_{22\varphi}^{2,2k\,\cdot} - \frac{4i}{x^2}\,\alpha_{22r}^{2,2k} \qquad (7.91)\\
0 &= \left(\frac{4}{x^2}+4\varkappa^2\right)\alpha_{22r}^{2,2k} - \frac{1}{x}\left(x\,\alpha_{22r}^{2,2k\,\cdot}\right)^{\cdot} - \frac{1}{x^2}\,\alpha_{22r}^{2,2k\,\cdot} + \frac{4i}{x^2}\,\alpha_{22\varphi}^{2,2k}\,.
\end{aligned}
$$

Eine Lösung, die die Randbedingung (7.42) erfüllt, lautet:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{22_r}(\underline{r}) &= \alpha_{22z}^{2,2k}(2\varkappa_1 x)\cos(2h)\\
\alpha_{22_\varphi}(\underline{r}) &= \alpha_{22\varphi}^{2,2k}(2\varkappa_1 x)\cos(2h) \qquad (7.92)\\
\alpha_{22_z}(\underline{r}) &= \alpha_{22z}^{2,2k}(2\varkappa_1 x)\sin(2h)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\alpha_{22z}^{2,2k}(2\varkappa_1 x) &= \frac{C_{22}B_{0\varphi}}{r_0}F_2(2\varkappa_1 x)\\
\alpha_{22\varphi}^{2,2k}(2\varkappa_1 x) &= (\varkappa x)^{-1}\,\alpha_{22z}^{2,2k}(2\varkappa_1 x) + \left(i\psi_2^{2,2k}(2\varkappa_1 x)\right)'\\
\alpha_{22r}^{2,2k}(2\varkappa_1 x) &= (\varkappa x)^{-1}\,i\psi_2^{2,2k}(2\varkappa_1 x) + \left(\alpha_{22z}^{2,2k}(2\varkappa_1 x)\right)' \qquad (7.93)
\end{aligned}
$$

$$
\psi_2^{2,2k}(2\varkappa_1 x) = \frac{iC_\psi B_{0\varphi}}{r_0}\,\tilde{G}_2(2\varkappa_1 x)\,.
$$

Für den winkelunabhängigen Anteil $\underline{\alpha}_{22}^{0,0}$ des Vektorpotentials $\underline{\alpha}_{22}$ haben wir nach (7.35) die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\{\frac{1}{x}\left[x\,\alpha_{22\varphi}^{0,0}\right]^{\cdot}\right\}^{\cdot}\underline{e}_\varphi - \frac{1}{x}\left\{x\,\alpha_{22z}^{0,0\,\cdot}\right\}^{\cdot}\underline{e}_z\\
0 &= \left\{x\,\alpha_{22r}^{0,0}\right\}^{\cdot}\,.
\end{aligned}
$$

Eine Lösung, die die Randbedingung (7.42) erfüllt, lautet:

$$\sigma^{0,0}_{22r}(x) = \frac{C_r B_{0\varphi}}{r_0} x^{-1}$$

$$\sigma^{0,0}_{22\varphi}(x) = \frac{C_\varphi B_{0\varphi}}{r_0}\left(x - x_w^2 x^{-1}\right) \qquad (7.94)$$

$$\sigma^{0,0}_{22z}(x) = \frac{C_z B_{0\varphi}}{r_0} \ln\left(x\, x_w^{-1}\right) .$$

Die Konstanten C_z, C_φ sowie C_{1z} und C_ψ werden durch die Randbedingungen auf S_0 festgelegt. Ihre Berechnung erfolgt im nächsten Abschnitt. Die Konstante C_r bleibt, wie wir sehen werden, unbestimmt. Da allerdings $\sigma^{0,0}_{22r}(x)$ in den weiteren Rechnungen nicht auftritt, bedeutet dies keine Schwierigkeit, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C_r = 0$ wählen.

7.8. Bestimmung der Konstanten der Lösungen zweiter Ordnung aus den Randbedingungen auf S_o

Wir berechnen zunächst die linken Seiten (7.37) und (7.40) der Randbedingungen (7.36) und (7.39). Mit der Winkelabhängigkeit der Lösungen für $\underline{\varphi}_{zz}$ und $\underline{\sigma}_{zz}$ (7.79a) und (7.92) findet man (alle x-abhängigen Größen sind wieder an der Stelle x = 1 zu nehmen) mit

$$\overline{\Pi}_o^{\ell} = \tau_o \left\{ 2\varphi_{22_r}^{0,0} + \frac{1}{B_{o\varphi}} \left(C_{\bar{z}} - 2 b_c C_\varphi \right) - (1+b_c^2)\, D(1) \right\} \tag{7.95}$$

$$\overline{\Pi}_2^{\ell} = \tau_o \left\{ 2\varphi_{22_r}^{2,2K} \left[1 + Q_c \left(\varphi_{22_r}^{2,2K} \right)^{-1} \left(i\varphi_{22_\varphi}^{2,2K} + b_c i \varphi_{22_z}^{2,2K} \right) \right] + \right. \tag{7.96}$$

$$\left. - \frac{2}{B_{o\varphi}} Q_c\, i \psi_2^{2,2K} \right\}$$

sowie mit

$$\beta_{o_r}^{\ell} = 0 = \beta_{2_r}^{\ell}$$

$$\beta_{o_\varphi}^{\ell} = \tau_o \left\{ \varphi_{22_r}^{0,0} - \frac{1}{B_{o\varphi}} \sigma_{22_{\bar{z}}}^{0,0} \right\} \tag{7.97}$$

$$\beta_{2_\varphi}^{\ell} = \tau_o \left\{ \varphi_{22_r}^{2,2K} - \frac{1}{B_{o\varphi}} \sigma_{22_z}^{2,2K} \right\} \tag{7.98}$$

$$\beta_{o_z}^{\ell} = \tau_o \left\{ b_c \varphi_{22_r}^{0,0} + \frac{1}{B_{o\varphi}} \sigma_{22_\varphi}^{0,0} \right\} \tag{7.99}$$

$$\beta_{2_z}^{\ell} = \tau_o \left\{ b_c \varphi_{22_r}^{2,2K} + \frac{1}{B_{o\varphi}} \sigma_{22_\varphi}^{2,2K} \right\} \tag{7.100}$$

für die linken Seiten

$$\overline{\Pi}^{\ell} = \overline{\Pi}_o^{\ell} + \overline{\Pi}_2^{\ell} \cos(2h) \tag{7.101}$$

$$\beta^{\ell} = \beta_o^{\ell} + \beta_2^{\ell} \cos(2h)\,. \tag{7.102}$$

Definiert man nun die Größen

$$\hat{\overline{\Pi}}_o^{r} = \overline{\Pi}_o^{r} - 2 \int_0^{\Lambda} \frac{\tau_o \Gamma^*(x)}{x^2 - \alpha^2}\, dx + \frac{1+b_c^2}{1-\alpha^2}\, \Gamma^*(x)\Big|_{x=1} \,, \tag{7.103}$$

$$\hat{\beta}^{r}_{0\varphi} = \beta^{r}_{0\varphi} - \int_{0}^{1} \frac{r_0 \Gamma^{\circ}(x)}{x^2 - \alpha^2}\, dx \quad , \tag{7.104}$$

$$\hat{\beta}^{r}_{0z} = \beta^{r}_{0z} - b_c \int_{0}^{1} \frac{r_0 \Gamma^{\circ}(x)}{x^2 - \alpha^2}\, dx \quad , \tag{7.105}$$

so lassen sich die Randbedingungen (7.36) und (7.39) für die winkelunabhängigen Größen in der Form

$$\begin{bmatrix} t^{0,0}_{11} & t^{0,0}_{12} & t^{0,0}_{13} \\ t^{0,0}_{21} & 0 & t^{0,0}_{23} \\ 0 & t^{0,0}_{23} & t^{0,0}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{\varphi} \\ C_z \\ C_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{\Pi}}^{r}_{0} \\ \hat{\beta}^{r}_{0z} \\ \hat{\beta}^{r}_{0\varphi} \end{bmatrix} \tag{7.106}$$

mit

$$t^{0,0}_{11} = -2 b_c \quad , \quad t^{0,0}_{12} = 1 \quad , \quad t^{0,0}_{13} = 2\left\{ \ln\left(1-\alpha^{-2}\right) - \tfrac{2}{3} \right\},$$

$$t^{0,0}_{21} = 1 - x_w^2 \quad , \quad t^{0,0}_{23} = b_c \ln\left(1-\alpha^{-2}\right),$$

$$t^{0,0}_{32} = \ln x_w \quad , \quad t^{0,0}_{33} = \ln\left(1-\alpha^{-2}\right)$$

formulieren ($\alpha^{-2} \leq 2/5$).

Als Lösung dieses Gleichungssystems findet man

$$C_{01} = \left\{ \hat{\bar{\Pi}}^{r}_{0} + \frac{2 b_c}{1 - x_w^2} \hat{\beta}^{r}_{0z} - \frac{1}{\ln x_w} \hat{\beta}^{r}_{0\varphi} \right\} \cdot \left\{ 2\left[\ln\left(1-\alpha^{-2}\right) - \tfrac{2}{3} \right] + \left[\frac{2 b_c}{1 - x_w^2} - \frac{1}{\ln x_w} \right] \ln\left(1-\alpha^{-2}\right) \right\}^{-1} \tag{7.107}$$

$$C_z = \frac{1}{\ln x_w} \left\{ \hat{\beta}^{r}_{0\varphi} - \ln\left(1-\alpha^{-2}\right) C_{01} \right\} \tag{7.108}$$

$$C_{\varphi} = \frac{1}{1 - x_w^2} \left\{ \hat{\beta}^{r}_{0z} - b_c \ln\left(1-\alpha^{-2}\right) C_{01} \right\} \tag{7.109}$$

Für die winkelabhängigen Größen findet man entsprechend

$$\begin{bmatrix} t_{11}^{2,2K} & t_{12}^{2,2K} & t_{13}^{2,2K} \\ t_{21}^{2,2K} & 0 & t_{23}^{2,2K} \\ 0 & t_{32}^{2,2K} & t_{33}^{2,2K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_\psi \\ C_{2z} \\ r_0 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{2z}^{r} \\ \overline{\pi}_2^{r} \\ \beta_{2\psi}^{r} \end{bmatrix} \qquad (7.110)$$

mit

$$t_{11}^{2,2K} = -(2\varkappa)^{-1}, \qquad t_{12}^{2,2K} = \varkappa^{-1}, \qquad t_{13}^{2,2K} = b_c\left(\varphi_{22r}^{2,2K}/C_2\right),$$

$$t_{21}^{2,2K} = 2 Q_c \widetilde{G}_2(2\varkappa,1) \qquad t_{23}^{2,2K} = \hat{\alpha}\, 2\left(\varphi_{22r}^{2,2K}/C_2\right),$$

$$t_{32}^{2,2K} = -1, \qquad t_{33}^{2,2K} = \left(\varphi_{22r}^{2,2K}/C_2\right),$$

wobei

$$\hat{\alpha} = 1 + Q_c\left(\varphi_{22r}^{2,2K}\right)^{-1}\left(i\varphi_{22\psi}^{2,2K} + b_c\, i\varphi_{22z}^{2,2K}\right)$$

ist. Die Koeffizienten $t_{i3}^{2,2K}$ (i = 1, 2, 3) sowie die nachfolgende Lösung für C_2 (7.111) enthalten den Faktor $\varphi_{22r}^{2,2K}/C_2$, der entgegen dem ersten Anschein wegen der Definition von $\varphi_{22r}^{2,2K}$ aus (7.80) beziehungsweise (7.82) unabhängig von C_2 ist.

Als Lösung des Gleichungssystems (7.110) erhalten wir

$$C_2 = r_0^{-1}\, \frac{4 Q_c \widetilde{G}_2(2\varkappa,1)\left[\varkappa\beta_{2z}^{r} + \beta_{2\psi}^{r}\right] + \overline{\pi}_2^{r}}{4 Q_c^2 \widetilde{G}_2(2\varkappa,1) + 2\hat{\alpha}} \left\{\varphi_{22r}^{2,2K}/C_2\right\}^{-1} \qquad (7.111)$$

$$C_{2z} = \frac{\overline{\pi}_2^{r} + 4\varkappa Q_c \widetilde{G}_2(2\varkappa,1)\,\beta_{2z}^{r} - \left(4 g_c Q_c \widetilde{G}_2(2\varkappa,1) + 2\hat{\alpha}\right)\beta_{2\psi}^{r}}{4 Q_c^2 \widetilde{G}_2(2\varkappa,1) + 2\hat{\alpha}} \qquad (7.112)$$

$$C_\psi = \frac{2\left[Q_c \overline{\pi}_2^{r} - 2\hat{\alpha}\left(\varkappa\beta_{2z}^{r} + \beta_{2\psi}^{r}\right)\right]}{4 Q_c^2 \widetilde{G}_2(2\varkappa,1) + 2\hat{\alpha}} \qquad (7.113)$$

Es sei nochmals daran erinnert, daß in (7.107) - (7.109) und in (7.111) - (7.113) alle x-abhängigen Größen an der Stelle x = 1 auszuwerten sind.

Mit der Angabe der Konstanten haben wir die Lösung des Gleichungssystems (7.34) - (7.42) abgeschlossen.

Im folgenden Kapitel werden wir die Integrabilitätsbedingung für die Entwicklunsgleichungen dritter Ordnung in ε angeben. Diese liefert eine nichtlineare Bewegungsgleichung für die Amplitude $A_1(T)$.

8. Nichtlineare Amplitudengleichung und Berechnung von ϑ_T

8.1. Die nichtlineare Amplitudengleichung für $A_1(T)$

Mit den im Anhang definierten Operatoren erhält man nach /9/ für $\delta_T = 0$ im Plasma die folgenden Gleichungen für die Störung dritter Ordnung in ε:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{F}}_{00}(\underline{\tilde{\varphi}}_3) = {} & \tau_2 \left(\rho_{00}\, \underline{\varphi}_1\, \partial^2 A_1/\partial T^2 - \underline{\mathbb{F}}_{01}(\underline{\varphi}_1) A_1 \right) \\ & - \left(\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_{20})\, a_{12} + \underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_{20}, \underline{\varphi}_1)\, a_{21} \right) \\ & - \left(\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_{22}) + 2\, \underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_{22}, \underline{\varphi}_1) + \underline{\mathbb{H}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1) \right) A_1^3/6 \end{aligned} \tag{8.01}$$

mit

$$\partial a_{12}/\partial T = A_2\, \partial A_1/\partial T \quad , \quad \partial a_{21}/\partial T = A_1\, \partial A_2/\partial T$$

und

$$a_{12} + a_{21} = A_1 A_2$$

Multipliziert man (8.01) mit $\underline{\tilde{\varphi}}_1$ und integriert über das Plasmavolumen, so läßt sich unter Berücksichtigung der in /9/ gegebenen Randbedingungen $\underline{\tilde{\varphi}}_3$ eliminieren, und man findet wegen $\delta_T = 0$ für $A_1(T)$ die nichtlineare Amplitudengleichung

$$\tau_2 \left(\partial^2 A_1/\partial T^2 - \gamma_T^2 A_1 \right) = 2\, \vartheta_T A_1^3 \quad , \tag{8.02}$$

wobei γ_T^2 durch (7.32) und ϑ_T nach /9/ durch den nachfolgenden Ausdruck gegeben sind.

$$12\, \rho_0\, \vartheta_T = \left(\underline{\varphi}_1 \, , \, \underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_{22}) + 2\, \underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\varphi}_{22}, \underline{\varphi}_1) + \underline{\mathbb{H}}_{00}(\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_1) \right) + \sigma_T \tag{8.03}$$

mit

$$
\begin{aligned}
\sigma_T = \int_{S_{00}} \Big\{ & (\underline{n}_{00}\cdot\underline{\varphi}_{11})\big[\psi_{11}(\underline{\varphi}_{11},\psi_{10}(\underline{\varphi}_{22})) + 2\,\psi_{11}(\underline{\varphi}_{22},\psi_{10}(\underline{\varphi}_{11})) + \\
& + \psi_{11}(\underline{\varphi}_{11},\psi_{11}(\underline{\varphi}_{11},\psi_{10}(\varphi_{11})))\big] + \\
& + (\underline{n}_{00}\cdot\underline{\varphi}_{11})\big[\underline{B}_{00}\cdot\big\{\underline{B}_{11}(\underline{\varphi}_{11},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22})) + 2\underline{B}_{11}(\underline{\varphi}_{22},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11})) + \\
& + \underline{B}_{11}(\underline{\varphi}_{11},\underline{B}_{11}(\underline{\varphi}_{11},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11})))\big\} + 3\mathcal{P}_{33}\big] - \\
& - \underline{n}_{00}\cdot\big[\underline{\varphi}_{22}\cdot\nabla\underline{\varphi}_{11} + 2\,\underline{\varphi}_{11}\cdot\nabla\underline{\varphi}_{22} + (\underline{\varphi}_{11}\cdot\nabla\underline{\varphi}_{11})\cdot\nabla\underline{\varphi}_{11} + \\
& + \underline{\varphi}_{11}\underline{\varphi}_{11}:\nabla\nabla\underline{\varphi}_{11}\big](\underline{B}^{v}_{00}\cdot\underline{B}^{v}_{11} + \varphi_{11}\cdot\nabla[P_{00}]) - 2\underline{\varepsilon}_{33}\cdot\underline{B}^{v}_{11}\Big\}\,d\sigma
\end{aligned}
\tag{8.04}
$$

Dabei wurden benutzt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{33} = {} & \underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11})\cdot\big(\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}) + \underline{B}_{11}(\underline{\varphi}_{11},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11}))\big) - \underline{B}^{v}_{11}\cdot\underline{B}^{v}_{22} - \\
& \underline{\varepsilon}_{22}\cdot\nabla[P_{11}] - \underline{\varepsilon}_{11}\cdot\nabla[P_{22}] - \underline{\varepsilon}_{11}\underline{\varepsilon}_{22}:\nabla\nabla[P_{00}] - \\
& - \underline{\varepsilon}_{11}\underline{\varepsilon}_{11}:\nabla\nabla[P_{11}] - 1/3\,\underline{\varepsilon}_{11}\underline{\varepsilon}_{11}\underline{\varepsilon}_{11}:\nabla\nabla\nabla[P_{00}]
\end{aligned}
\tag{8.05}
$$

$$
\underline{B}^{v}_{11} = \nabla\times\underline{\mathcal{A}}_{11}\,, \qquad \underline{B}^{v}_{22} = \nabla\times\underline{\mathcal{A}}_{22} \tag{8.06}
$$

$$
[P_{00}] = \underline{B}^{v\,2}_{00}/2 - \big(\underline{B}^{2}_{00}/2 + p_{00}\big) \tag{8.07}
$$

$$
[P_{11}] = \underline{B}^{v}_{00}\cdot\underline{B}^{v}_{11} - \big(\underline{B}_{00}\cdot\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11}) + \psi_{10}(\underline{\varphi}_{11})\big) \tag{8.08}
$$

$$
\begin{aligned}
[P_{22}] = {} & \underline{B}^{v}_{00}\cdot\underline{B}^{v}_{22} - \Big(\underline{B}_{00}\cdot\big[\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}) + \underline{B}_{11}(\underline{\varphi}_{11},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11}))\big] + \\
& + \psi_{10}(\underline{\varphi}_{22}) + \psi_{11}(\underline{\varphi}_{11},\psi_{10}(\underline{\varphi}_{11}))\Big) + \underline{B}^{v\,2}_{11} - \underline{B}^{2}_{10}(\underline{\varphi}_{11})
\end{aligned}
\tag{8.09}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathcal{E}}_{33} = {} & \underline{n}_{00} \times \left(\underline{F}_{11} \cdot \nabla \underline{\sigma}_{22} + \tfrac{1}{2} [\underline{F}_{22} \cdot \nabla \underline{\sigma}_{11} + \underline{F}_{11} \underline{F}_{11} : \nabla \nabla \underline{\sigma}_{11}] \right) + \\
& + \underline{n}_{11} \times \left(\underline{\sigma}_{22} + \underline{F}_{11} \cdot \nabla \underline{\sigma}_{11} \right) + \tfrac{1}{2} \underline{n}_{22} \times \underline{\sigma}_{11} + \\
& + \tfrac{1}{2} (\underline{n}_{00} \cdot \underline{F}_{11}) \left[\underline{B}^{v}_{22} + \underline{F}_{22} \cdot \nabla \underline{B}^{v}_{00} + \underline{F}_{11} \underline{F}_{11} : \nabla \nabla \underline{B}^{v}_{00} + 2 \underline{F}_{11} \cdot \nabla \underline{B}^{v}_{11} \right] + \\
& + (\underline{n}_{11} \cdot \underline{F}_{11} + \underline{n}_{00} \cdot \underline{F}_{22}) \left[\underline{B}^{v}_{11} + \underline{F}_{11} \cdot \nabla \underline{B}^{v}_{00} \right] + \\
& + \left(\underline{n}_{11} \cdot \underline{F}_{22} + \tfrac{1}{2} \underline{n}_{22} \cdot \underline{F}_{11} \right) \underline{B}^{v}_{00} \quad .
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

8.2. Berechnung von $\varrho_0 \vartheta_\tau r_0^7 B_{0\varphi}^{-2}$

Auf eine ausführliche Darstellung der langwierigen Berechnung wird im folgenden aus Platzgründen verzichtet. Wir geben zunächst einige für die sich anschließenden Rechnungen mehrfach benötigte Ausdrücke an.

$$\underline{\mathbb{B}}_1\left(\underline{\varphi}_1, \underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1, \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right) = -\frac{B_{0\varphi}}{r_0^3} Q_c \Big\{ x^{-1}\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}(x\varphi_{1r}^{1,\kappa})^*\right]^* \sinh \underline{e}_r +$$

$$+\Big(\varkappa\left[x^{-1} i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}(x\varphi_{1r}^{1,\kappa} i\varphi_{1z}^{1,\kappa})^* - i\varphi_{1z}^{1,\kappa}(\varphi_{1r}^{1,\kappa} i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa})^*\right] - \left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}(\varphi_{1r}^{1,\kappa} i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa})^*\right]^*\Big)\cosh \underline{e}_\varphi +$$

$$-\Big(x^{-1}\left[x^{-1} i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}(x\varphi_{1r}^{1,\kappa} i\varphi_{1z}^{1,\kappa})^* - i\varphi_{1z}^{1,\kappa}(\varphi_{1r}^{1,\kappa} i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa})^*\right] + x^{-1}\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}(x\varphi_{1r}^{1,\kappa} i\varphi_{1z}^{1,\kappa})^*\right]^*\Big)\cosh \underline{e}_z\Big\}$$

$$\mathbb{P}_1\left(\underline{\varphi}_1, \mathbb{P}_1(\underline{\varphi}_1, \mathbb{P}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right) = \frac{2B_{0\varphi}^2}{r_0^3}\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}(x\varphi_{1r}^{1,\kappa})^*\right]^* \cosh$$

$$\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}) = -\frac{1}{r_0} D(x)\,\underline{B}_{00}$$

$$\underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa} e^{i2h}}\right) = 2\frac{B_{0\varphi}}{r_0} Q\,\overline{i\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa} e^{i2h}}$$

$$\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1, \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,0})) = \frac{1}{r_0^3}\left[D^*(x)\varphi_{1r}^{1,\kappa}\cosh \underline{B}_{00} - r_0 D(x)\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right]$$

$$\underline{\mathbb{B}}_1\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}, \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right) =$$

$$= \frac{B_{0\varphi}}{r_0^3} Q_c \Big\{\left[x^{-1}(x\varphi_{1r}^{1,\kappa})^* r_0\varphi_{22r}^{0,0}\sinh + \varphi_{1r}^{1,\kappa}(x^{-1} r_0\varphi_{22\varphi}^{0,0} + \varkappa r_0\varphi_{22z}^{0,0})\cosh\right]\underline{e}_r +$$

$$+\Big[\left[i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}(x^{-1} r_0\varphi_{22\varphi}^{0,0} + \varkappa r_0\varphi_{22z}^{0,0}) - x\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(\frac{r_0\varphi_{22\varphi}^{0,0}}{x}\right)^*\right]\sinh - \left(r_0\varphi_{22r}^{0,0} i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^*\cosh\Big]\underline{e}_\varphi +$$

$$+\Big[\left[i\varphi_{1z}^{1,\kappa}(x^{-1} r_0\varphi_{22\varphi}^{0,0} + \varkappa r_0\varphi_{22z}^{0,0}) - \varphi_{1r}^{1,\kappa}(r_0\varphi_{22z}^{0,0})^*\right]\sinh - x^{-1}\left(x r_0\varphi_{22r}^{0,0} i\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)^*\cosh\Big]\underline{e}_z\Big\}$$

$$\underline{\mathbb{B}}_1\left(\underline{\varphi}_1,\ \underline{\mathbb{B}}_{10}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h}}\right)\right) + 2\,\underline{\mathbb{B}}_1\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h}},\ \underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right) =$$

$$= \frac{2\,\mathcal{B}_{0\varphi}}{r_0^3}\, Q_c \left\{ x^{-1}\left[\tfrac{1}{2}\, \varphi_{1r}^{1,K} (x\, r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K})^{\cdot} + r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K} (x\, \varphi_{1r}^{1,K})^{\cdot} \sinh \right] \underline{e}_r + \right.$$

$$- \left[x\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\, r_0\, i\varphi_{22z}^{2,2K} - i\varphi_{1z}^{1,K}\, r_0\, i\varphi_{22\varphi}^{2,2K}\right) + \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\, r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K}\right)^{\cdot} + \left(\varphi_{1r}^{1,K}\, r_0\, i\varphi_{22\varphi}^{2,2K}\right)^{\cdot} \right] \cosh \underline{e}_\varphi +$$

$$\left. + \left[x^{-1}\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\, r_0\, i\varphi_{22z}^{2,2K} - i\varphi_{1z}^{1,K}\, r_0\, i\varphi_{22\varphi}^{2,2K}\right) - x^{-1}\left(x\, i\varphi_{1z}^{1,K}\, r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K}\right)^{\cdot} - x^{-1}\left(x\, \varphi_{1r}^{1,K}\, r_0\, i\varphi_{22z}^{2,2K}\right) \right] \cosh \underline{e}_z \right\}$$

$$\mathbb{P}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right) = \frac{\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{r_0^2} \left\{ 2\, x\, r_0\, \varphi_{22r}^{0,0} - 5/3\, (1-x^2)\, r_0\, \mathcal{D}(x) \right\}$$

$$\mathbb{P}_{10}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h}}\right) = \frac{2\,\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{r_0^2}\, x\, r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K} \cos 2h$$

$$\mathbb{P}_1\left(\underline{\varphi}_1,\ \mathbb{P}_{10}\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0}\right)\right) = -\frac{\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{3\, r_0^3} \left\{ \varphi_{1r}^{1,K} \left(16\, x\, r_0\, \mathcal{D}(x) - 5(1-x^2)\, r_0\, \mathcal{D}^{\cdot}(x) \right) \cosh \right\}$$

$$\mathbb{P}_1\left(\underline{\varphi}_{22}^{0,0},\ \mathbb{P}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right) = -\frac{2\,\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{r_0^3} \left\{ \left[r_0\, \varphi_{22r}^{0,0} \left(x\, \varphi_{1r}^{1,K} \right)^{\cdot} + 5/3\, \varphi_{1r}^{1,K}\, x\, r_0\, \mathcal{D}(x) \right] \cosh h + \right.$$

$$\left. - \varphi_{1r}^{1,K} \left(r_0\, \varphi_{22\varphi}^{0,0} + x\, r_0\, \varphi_{22z}^{0,0} \right) \sinh \right\}$$

$$\mathbb{P}_1\left(\underline{\varphi}_1,\ \mathbb{P}_{10}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h}}\right)\right) + 2\,\mathbb{P}_1\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h}},\ \mathbb{P}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right) =$$

$$= -\frac{\mathcal{B}_{0\varphi}^2}{r_0^3} \left\{ \varphi_{1r}^{1,K} \left(x\, r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K} \right)^{\cdot} + 2\, r_0\, \varphi_{22r}^{2,2K} \left(x\, \varphi_{1r}^{1,K} \right)^{\cdot} \right\} \cosh h$$

mit $\quad \overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h}} := \mathcal{R}e\left(\underline{\varphi}_{22}^{2,2K}\, e^{i2h} \right)$

für den in (8.10) auftretenden Entwicklungskoeffizienten $\underline{n}_{22}$ des Normalenvektors erhält man gemäß Abschnitt 7.4. mit

$$\underline{N}_{22} = N_{22r}\,\underline{e}_r + \frac{1}{r_0^2}\,\chi^{-1}\Big\{ r_0 \varphi_{22\,\varphi}^{0,0} + \Big[2r_0\,\varphi_{22\,r}^{2,2k} + r_0\, i\,\varphi_{22\,\varphi}^{2,2k} + \\ + \frac{1}{4}\Big(\varphi_{1r}^{1,k}(i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^{\cdot} - 5(\varphi_{1r}^{1,k})^{\cdot}\, i\varphi_{1\varphi}^{1,k}\Big) - \frac{1}{2\chi}(\varphi_{1r}^{1,k} + i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2\Big]\sin 2h\Big\}\underline{e}_\varphi \\ + \frac{\chi}{r_0^2}\Big(2r_0\varphi_{22\,r}^{2,2k} + \frac{1}{2\chi}\Big[(\varphi_{1r}^{1,k})^2 - (i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2\Big]\Big)\sin 2h\;\underline{e}_z$$

das Ergebnis

$$\underline{n}_{22} = \underline{n}_{22}^{0,0} + n_{22\,r}^{2,2k}\cos(2h)\,\underline{e}_r + n_{22\,\varphi}^{2,2k}\sin(2h)\,\underline{e}_\varphi + n_{22\,z}^{2,2k}\sin(2h)\,\underline{e}_z\,,$$

wobei

$$\underline{n}_{22}^{0,0} = \frac{-1}{2r_0^2}\Big\{(\varphi_{1r}^{1,k})^2(\chi^2 + \chi^{-2}) + (\chi^{-1} i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2\Big\}\underline{e}_r + \frac{1}{r_0\chi}\,\varphi_{22\,\varphi}^{0,0}\,\underline{e}_\varphi$$

$$n_{22\,r}^{2,2k} = \frac{1}{2r_0^2}\Big\{(\varphi_{1r}^{1,k})^2(\chi^2 + \chi^{-2}) + (\chi^{-1} i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2\Big\}$$

$$n_{22\,\varphi}^{2,2k} = \frac{1}{r_0^2}\,\chi^{-1}\Big\{2r_0\varphi_{22\,r}^{2,2k} + r_0\, i\varphi_{22\,\varphi}^{2,2k} - \frac{1}{2\chi}(\varphi_{1r}^{1,k} + i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2 + \\ \varphi_{1r}^{1,k}(\varphi_{1r}^{1,k})^{\cdot} + \frac{1}{4}\Big[\varphi_{1r}^{1,k}(i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^{\cdot} - (\varphi_{1r}^{1,k})^{\cdot}\, i\varphi_{1\varphi}^{1,k}\Big]\Big\}$$

$$n_{22\,z}^{2,2k} = \frac{\chi}{r_0^2}\Big\{2r_0\varphi_{22\,r}^{2,2k} + \varphi_{1r}^{1,k}(\varphi_{1r}^{1,k})^{\cdot} + \frac{1}{2\chi}\Big[(\varphi_{1r}^{1,k})^2 - (i\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2\Big]\Big\}.$$

Für das in ϑ_T auftretende, mit dem trilinearen Term

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{H}}_{00}(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_1) = {} & \underline{j}_{00}\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)))+\\ & +[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)))]\times\underline{\mathbb{B}}_{00}+\\ & -\nabla\mathbb{p}_1(\underline{\varphi}_1,\mathbb{p}_1(\underline{\varphi}_1,\mathbb{p}_{10}(\underline{\varphi}_1)))+\\ & +3[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)]\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1))+\\ & +3[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1))]\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)\end{aligned}$$

gebildete Skalarprodukt

$$\left(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{H}}_{00}(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_1;\underline{\varphi}_1)\right)$$

bekommen wir der Reihe nach die Beiträge:

$$\frac{r_0^7}{12\,\mathbb{B}_{0\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1,\ \underline{j}_{00}\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)))\right)=$$

$$=\frac{\pi^2 Q_c}{3\varkappa}r_0^6\int_0^1\left\{-\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^*\right]^*-\frac{i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}}{x}\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(x\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^*\right]^*+\right.$$

$$\left.+\varkappa\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\left(i\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)^*-\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^*i\varphi_{1z}^{1,\kappa}+\frac{i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\,i\varphi_{1z}^{1,\kappa}}{x}\right)\right\}x\,dx$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,\left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1\,,\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1\,,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\varphi_1)))\right]\times\underline{\mathbb{B}}_{00}\right)=$$

$$=-\frac{\pi^2 Q_c^2}{6\,\varkappa}\,r_o^6\int_0^1\Big\{\left[\varphi_{1r}^{1,iK}\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\right)^*\right]^*\left[\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\right)^2+\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^2+\left(i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^2\right]+$$

$$+\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)\left(\frac{\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^*}{x}\right)^*+x^2\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)\left(\frac{\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^*}{x}\right)^*\Big\}dx+$$

$$-\frac{\pi^2 Q_c}{6\,\varkappa}\,r_o^6\Big\{\;x^2\varphi_{1r}^{1,iK}\left[\varphi_{1r}^{1,iK}\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^*\right]+$$

$$+\,b_c\,\varphi_{1r}^{1,iK}\left[\varphi_{1r}^{1,iK}\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^*\right]^*+x\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\right)^2\left(\frac{b_c}{x}-\varkappa x\right)\cdot$$

$$\cdot\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\left(i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^*-\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^*i\varphi_{1z}^{1,iK}+\frac{i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\,i\varphi_{1z}^{1,iK}}{x}\right)\Big\}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,-\nabla\mathbb{P}_1\left(\underline{\varphi}_1\,,\mathbb{P}_1\left(\underline{\varphi}_1\,,\mathbb{P}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right)\right)\right)=$$

$$=-\frac{\pi^2}{3\,\varkappa}\,r_o^6\left\{x\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\right)^2\left[\varphi_{1r}^{1,iK}\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\right)^*\right]^*\right\}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,\,3\left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\varphi_1)\right]\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\varphi}_1\,,\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right)=$$

$$=\frac{\pi^2 Q_c^2}{2\,\varkappa}\,r_o^6\int_0^1\Big\{\varphi_{1r}^{1,iK}\left[\left(i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^*\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^*+\left(x\,i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^*\left(\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^*+\right.$$

$$-\varphi_{1r}^{1,iK}\left[\varphi_{1r}^{1,iK}\left(x\varphi_{1r}^{1,iK}\right)^*\right]^*+\varphi_{1r}^{1,iK}\left(\varkappa x\,i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}-i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\left(i\varphi_{1z}^{1,iK}\right)^*-\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right)^*i\varphi_{1z}^{1,iK}+\frac{i\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\,i\varphi_{1z}^{1,iK}}{x}\right)\right\}dx$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,\,3\left[\nabla\times\underline{B}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right]\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right)=$$

$$=\frac{\pi^2 Q_c^2}{\varkappa}\,r_o^6\int_0^{\hat{}}\Big\{\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\left[\times\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^{\bullet}\right]^{\bullet}+$$

$$+\times\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\left[x^{-1}\left(\times\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)^{\bullet}\right]^{\bullet}\Big\}\,dx$$

Das mit den bilinearen Termen

$$\underline{G}_{oo}(\underline{\varphi}_1\,,\underline{\varphi}_{22})+2\,\underline{G}_{oo}(\underline{\varphi}_{22}\,,\underline{\varphi}_1)=$$

$$=\underline{j}_{oo}\times\left[\underline{B}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}))+2\,\underline{B}_1(\underline{\varphi}_{22}\,,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right]+$$

$$+\left[\nabla\times\left(\underline{B}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}))+2\,\underline{B}_1(\underline{\varphi}_{22}\,,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right)\right]\times\underline{B}_{oo}+$$

$$-\nabla\left[1p_1(\underline{\varphi}_1\,,1p_{10}(\underline{\varphi}_{22}))+2\,1p_1(\underline{\varphi}_{22}\,,1p_{10}(\underline{\varphi}_1))\right]+$$

$$+3\left[\left(\nabla\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right)\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{11})+\left(\nabla\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22})\right)\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1)\right]$$

in $\mathfrak{H}_1$ gebildete Skalarprodukt zerfällt wegen (7.47) in einen Anteil mit $\underline{\varphi}_{11}^{0,0}$ und einen Anteil mit $\mathrm{Re}\,(\underline{\varphi}_{11}^{2,\kappa}\exp(i2h))$. Die Auswertung des ersten liefert zu $\mathfrak{H}_1$ der Reihe nach die vier Terme:

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,\ \underline{j}_{oo}\times\left\{\underline{B}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,i,0}))+2\,\underline{B}_1(\underline{\varphi}_{22}^{0,i,0},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right\}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{3\varkappa}\ r_o^6\left\{2\,Q_c\left[\varkappa\, r_o\,\underline{\varphi}_{22r}^{0,i,0}\ \varphi_{1r}^{1,iK}\ i\,\varphi_{1\varphi}^{1,iK}\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left[2\,Q_c\, r_o\, D(x)\,\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,iK}-r_o\times D^{\cdot}(x)(\varphi_{1r}^{1,iK})^2\right]\times dx\right\}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,\ \left\{\nabla\times\left[\underline{B}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,i,0}))+2\,\underline{B}_1(\underline{\varphi}_{22}^{0,i,0},\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right]\right\}\times\underline{B}_{oo}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{6\varkappa}\,r_o^6\left\{Q_c^2\left[r_o\times\varphi_{22r}^{0,i,0}\left\{(\varphi_{1r}^{1,iK})^2+(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK})^2+(i\varphi_{12}^{1,iK})^2\right\}\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+\right.$$

$$+\,Q_c\left[3\,r_o\times D(x)\,\varphi_{1r}^{1,iK}\,(\times i\,\varphi_{1\varphi}^{1,iK}+b_c\,i\,\varphi_{12}^{1,iK})-4\,r_o\times\varphi_{22r}^{0,i,0}\,\varphi_{1r}^{1,iK}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,iK}+\right.$$

$$\left.2\ r_o\times\varphi_{22r}^{0,i,0}\ \varphi_{1r}^{1,iK}\,(\times i\,\varphi_{1\varphi}^{1,iK}+b_c\,i\,\varphi_{12}^{1,iK})^{\cdot}\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+$$

$$-\left[(x^2+b_c^2)\times D^{\cdot}(x)\,r_o\,(\varphi_{1r}^{1,iK})^2\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+$$

$$+\int_0^1\left\{2\,Q_c^2\left(r_o\,\varphi_{22r}^{0,i,0}\left[(\varphi_{1r}^{1,iK})^2-(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK})^2\right]+r_o\times D(x)\left[(\varphi_{1r}^{1,iK})^2+(i\varphi_{1\varphi}^{1,iK})^2\right]\right)+\right.$$

$$\left.-\,Q_c\,r_o\times D^{\cdot}(x)\,\varphi_{1r}^{1,iK}\,(\times i\,\varphi_{1r}^{1,iK}+b_c\,i\,\varphi_{12}^{1,iK})\right\}dx$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_1\,,\ -\nabla\left\{1\!\!P_1(\underline{\varphi}_1,1\!\!P_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,i,0}))+2\,1\!\!P_1(\underline{\varphi}_{22}^{0,i,0},1\!\!P_{10}(\underline{\varphi}_1))\right\}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{18\varkappa}\ r_o^6\left\{\times(\varphi_{1r}^{1,iK})^2\left(16\times r_o\,D(x)-5(1-x^2)\,r_o\,D^{\cdot}(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\times\varphi_{1r}^{1,iK}\left(12\,r_o\,\varphi_{22r}^{0,i,0}\,(\times\varphi_{1r}^{1,iK})^{\cdot}+20\,\varphi_{1r}^{1,iK}\times r_o\,D(x)\right)\right\}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

und

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\,3\left[\nabla\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\right]\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,0})+3\left[\nabla\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{22}^{0,0})\right]\times\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\right)=$$

$$=\frac{\pi^2}{2\varkappa}\,r_0^6\left\{\left[r_0\,D(x)\times\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(\times\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}+b_c\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+\right.$$

$$+\int_0^1\left[r_0\,D(x)\left\{Q_c\left[\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2+\left(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^2+\left(i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)^2\right]+4\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right\}+\right.$$

$$\left.\left.+r_0\,D'(x)\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(x\,i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}+b_c\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)\right]\times dx\right.$$

Die Auswertung des zweiten Beitrags

$$\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\,\underline{G}_{00}\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\,\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\,e^{i2k}}\right)+2\,\underline{G}_{00}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\,e^{i2k}}\,,\,\underline{\varphi}_{1}\right)\right)$$

liefert analog:

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\,\underline{j}_{00}\times\left\{\underline{B}_{1}\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\,\underline{B}_{10}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\,e^{i2k}}\right)\right)+2\,\underline{B}_{1}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\,e^{i2k}}\,,\,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\right)\right\}\right)=$$

$$=\frac{2\,\pi^2 Q_c}{3\,\varkappa}\,r_0^6\left\{\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\times r_0\,i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2\kappa}+i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\times r_0\,\varphi_{22r}^{2,2\kappa}\right)\right\}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\left[\nabla\times\left\{\underline{B}_{1}\left(\underline{\varphi}_{1}\,,\,\underline{B}_{10}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\,e^{i2k}}\right)\right)+2\,\underline{B}_{1}\left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2\kappa}\,e^{i2k}}\,,\,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{1})\right)\right\}\right]\times\underline{B}_{00}\right)=$$

$$=\frac{\pi^2 Q_c}{3\,\varkappa}\,r_0^6\left\{\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(\frac{1}{2}\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\times r_0\,\varphi_{22r}^{2,2\kappa}+x^2\left(W_\varphi+\varkappa V\right)+b_c\left(W_z-V\right)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}+\right.$$

$$\left.+Q_c\int_0^1\left[\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2 r_0\,\varphi_{22r}^{2,2\kappa}+x\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\left(W_\varphi+\varkappa V\right)+i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\left(W_z-V\right)\right]dx\right\}$$

mit: $V := i\varphi_{1\varphi}^{1,K} r_0 \, i\varphi_{22z}^{2,2K} - i\varphi_{1z}^{1,K} \, i\varphi_{22\varphi}^{2,2K}$

$W_\varphi := \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K} r_0 \varphi_{22r}^{2,2K} + \varphi_{1r}^{1,K} r_0 \, i\varphi_{22\varphi}^{2,2K} \right)^*$

$W_z := \left(i\varphi_{1z}^{1,K} \times r_0 \varphi_{22r}^{2,2K} + \varphi_{1r}^{1,K} \times r_0 i\varphi_{22z}^{2,2K} \right)^*$

und

$$\frac{r_0^7}{12 B_{0\varphi}^2} \left(\underline{\varphi}_1 , -\nabla \left\{ \mathbb{P}_1 \left(\underline{\varphi}_1 , \mathbb{P}_{10} \left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K} e^{i2k}} \right) \right) + 2 \mathbb{P}_1 \left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K} e^{i2k}} , \mathbb{P}_{10} (\underline{\varphi}_1) \right) \right\} \right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3\varkappa} r_0^6 \left[\frac{1}{x} \left(\times \varphi_{1r}^{1,K} \right)^2 \left(\times r_0 \varphi_{22r}^{2,2K} \right)^* \right] \Big|_{x=0}^{x=1}$$

sowie

$$\frac{r_0^7}{12 B_{0\varphi}^2} \left(\underline{\varphi}_1 , 3 \left[\nabla \times \underline{\mathbb{B}}_{10} (\underline{\varphi}_1) \right] \times \underline{\mathbb{B}}_{10} \left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K} e^{i2k}} \right) + \right.$$

$$\left. + 3 \left[\nabla \times \underline{\mathbb{B}}_{10} \left(\overline{\underline{\varphi}_{22}^{2,2K} e^{i2k}} \right) \right] \times \underline{\mathbb{B}}_{10} (\underline{\varphi}_1) \right) =$$

$$= \frac{\pi^2 Q_c^2}{12 \varkappa} r_0^6 \left\{ \left[\times r_0 \varphi_{22r}^{2,2K} \left\{ \left(\varphi_{1r}^{1,K} \right)^2 - \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K} \right)^2 - \left(i\varphi_{1z}^{1,K} \right)^2 \right\} \right] \Big|_{x=0}^{x=1} + \right.$$

$$- 2 \int_0^1 \Big[r_0 \, i\varphi_{22z}^{2,2K} \left\{ \left(i\varphi_{1z}^{1,K} \right)^* \times \varphi_{1r}^{1,K} - i\varphi_{1z}^{1,K} \left(\times \varphi_{1r}^{1,K} \right)^* \right\} +$$

$$+ r_0 \, i\varphi_{22\varphi}^{2,2K} \left\{ \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K} \right)^* \times \varphi_{1r}^{1,K} - \times i\varphi_{1\varphi}^{1,K} \left(\varphi_{1r}^{1,K} \right)^* \right\} +$$

$$\left. + r_0 \varphi_{22r}^{2,2K} \left\{ \left(i\varphi_{1\varphi}^{1,K} \right)^2 - \left(\varphi_{1r}^{1,K} \right)^2 \right\} \Big] dx \right\}$$

Zu berechnen bleibt jetzt noch der Beitrag von σ_T zu ϑ_T. Wir tun dies zunächst ohne Berücksichtigung der Anteile die von $\mathcal{P}_{33}$ und $\underline{\mathcal{E}}_{33}$ herrühren. Ein erster Anteil kann mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Volumenintegral umgewandelt werden, das nur Terme enthält, die bereits früher auftraten und somit bekannt sind. Es ist:

$$\int_{S_{00}} (\underline{n}_{00} \cdot \underline{\varphi}_{11}) \left[\mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{11}, \mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{22})) + 2\,\mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{22}, \mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{11})) + \right.$$
$$\left. + \mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{11}, \mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{11}, \mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{11}))) \right] d\sigma =$$
$$- \left(\underline{\varphi}_{11}, -\nabla \left\{ \mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{11}, \mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{22})) + 2\,\mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{22}, \mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{11})) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{11}, \mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_{11}, \mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{11}))) \right\} \right)$$

Für die weiteren Anteile von σ_T erhalten wir der Reihe nach:

$$\frac{r_0^7}{12 B_{0\varphi}^2} \int_{S_{00}} (\underline{n}_{00} \cdot \underline{\varphi}_{11}) \left[\underline{\mathfrak{B}}_1(\underline{\varphi}_{11}, \underline{\mathfrak{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{22})) + 2\,\underline{\mathfrak{B}}_1(\underline{\varphi}_{22}, \underline{\mathfrak{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{11})) + \right.$$
$$\left. + \underline{\mathfrak{B}}_1(\underline{\varphi}_{11}, \underline{\mathfrak{B}}_1(\underline{\varphi}_{11}, \underline{\mathfrak{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{11}))) \right] \cdot \underline{\mathfrak{B}}_{00}\, d\sigma =$$
$$= - \frac{\pi^2 Q_c}{3\varkappa} r_0^6 \left[\chi^2 \varphi_{1r}^{1,K} (W_\varphi + \varkappa V) + \varphi_{1r}^{1,K} b_c (W_z - V) \right] \Big|_{\chi=1} +$$
$$+ \frac{\pi^2}{6\varkappa} r_0^6 \left[(\chi^2 + b_c^2)(\varphi_{1r}^{1,K})^2 \chi r_0 \mathfrak{D}^*(\chi) + 4 Q_c \chi r_0 \varphi_{22r}^{0,0} \varphi_{1r}^{1,K} i \varphi_{1\varphi}^{1,K} + \right.$$
$$- 3 Q_c \varphi_{1r}^{1,K} \chi r_0 \mathfrak{D}(\chi) (\chi i \varphi_{1\varphi}^{1,K} + b_c i \varphi_{1z}^{1,K}) +$$
$$\left. - 2 Q_c \varphi_{1r}^{1,K} \chi r_0 \varphi_{22r}^{0,0} (\chi i \varphi_{1\varphi}^{1,K} + b_c i \varphi_{1z}^{1,K})^* \right] \Big|_{\chi=1} +$$
$$+ \frac{\pi^2 Q_c}{6\varkappa} r_0^6 \left[\chi \varphi_{1r}^{1,K} \left\{ \chi \left[\varphi_{1r}^{1,K} (\varphi_{1r}^{1,K} i \varphi_{1\varphi}^{1,K})^* \right]^* + \frac{b_c}{\chi} \left[\varphi_{1r}^{1,K} (\chi \varphi_{1r}^{1,K} i \varphi_{1z}^{1,K})^* \right]^* \right\} + \right.$$
$$\left. + \varphi_{1r}^{1,K} \left(\frac{b_c}{\chi} - \varkappa \chi \right) \left\{ i \varphi_{1\varphi}^{1,K} (\chi \varphi_{1r}^{1,K} i \varphi_{1z}^{1,K})^* - \chi i \varphi_{1z}^{1,K} (\varphi_{1r}^{1,K} i \varphi_{1\varphi}^{1,K})^* \right\} \right] \Big|_{\chi=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}} -\underline{n}_{oo}\cdot\left(\underline{\varphi}_{22}\cdot\nabla\underline{\varphi}_1+2\,\underline{\varphi}_1\cdot\nabla\underline{\varphi}_{22}\right)\left(\underline{B}_{oo}^{v}\cdot[\nabla\times\underline{\alpha}_1]+\underline{\varphi}_1\cdot\nabla[\mathfrak{P}_{oo}]\right)d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2 Q_c^2}{12\,\varkappa}\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\,r_o^6\Big[2\,r_o\varphi_{22r}^{0,0}\,\varphi_{1r}^{1,K}(\varphi_{1r}^{1,K})^{*}+4(r_o\varphi_{22r}^{0,0})^{*}(\varphi_{1r}^{1,K})^2+$$

$$-3r_o\,i\varphi_{22\varphi}^{2,2K}\,\varphi_{1r}^{1,K}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,K}+\frac{1}{2}\left\{\varkappa r_o\varphi_{22r}^{2,2K}(\varphi_{1r}^{1,K})^2\right\}^{*}+$$

$$+2\left\{r_o\varphi_{22r}^{2,2K}(\varkappa\varphi_{1r}^{1,K})^2\right\}^{*}\Big]\Big|_{\varkappa=1}$$

und

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}} -\underline{n}_{oo}\cdot\left\{(\underline{\varphi}_1\cdot\nabla\underline{\varphi}_1)\cdot\nabla\underline{\varphi}_1+\underline{\varphi}_1\underline{\varphi}_1:\nabla\nabla\underline{\varphi}_1\right\}\left(\underline{B}_{oo}^{v}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot[\nabla\times\underline{\alpha}_1]+\underline{\varphi}_1\cdot\nabla[\mathfrak{P}_{oo}]\right)d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2 Q_c^2}{24\,\varkappa}\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\,r_o^6\Big[(\varphi_{1r}^{1,K})^2\left\{4([\varphi_{1r}^{1,K}]^{*})^2+4(\varphi_{1r}^{1,K})^{**}-3(\varphi_{1r}^{1,K})^2\right\}+$$

$$+\varphi_{1r}^{1,K}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,K}\left\{2\,\varphi_{1r}^{1,K}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,K}-3\,\varphi_{1r}^{1,K}(i\varphi_{1\varphi}^{1,K})^{*}+2(\varphi_{1r}^{1,K})^{*}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,K}+\right.$$

$$\left.-(\varphi_{1r}^{1,K})^2\right]\Big|_{\varkappa=1}.$$

$\mathcal{P}_{33}$ liefert zu σ_T bzw. ϑ_T bis auf einen Faktor den Beitrag:

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}} 3(\underline{n}_{oo}\cdot\underline{\varphi}_1)\,\mathcal{P}_{33}\,d\sigma \quad .$$

Dieser zerfällt nach (8.05) in sieben Teilbeiträge. Die beiden ersten sind:

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}} 3(\underline{n}_{oo}\cdot\underline{\varphi}_1)\,\underline{\mathcal{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1)\cdot\left(\underline{\mathcal{B}}_{10}(\underline{\varphi}_{22})+\underline{\mathcal{B}}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{\mathcal{B}}_{10}(\underline{\varphi}_1))\right)d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{2\varkappa}\,r_o^6\,Q_c\Big\{-\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}+b_c\,i\varphi_{12}^{1,\kappa}\right)r_o\,\mathcal{D}(1)+$$

$$+\,Q_c\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\Big[\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,r_o\,\varphi_{22r}^{2,2\kappa}+i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\,r_o\,i\varphi_{22\varphi}^{2,2\kappa}+i\varphi_{12}^{1,\kappa}\,r_o\,i\varphi_{22_2}^{2,2\kappa}+$$

$$-i\varphi_{1\varphi}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^{\bullet}-i\varphi_{12}^{1,\kappa}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\varphi_{12}^{1,\kappa}\right)^{\bullet}\Big]\Big\}\Big|_{X=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}} 3(\underline{n}_{oo}\cdot\underline{\varphi}_1)\left(-\left[\nabla\times\underline{\mathcal{O}}_1\right]\cdot\left[\nabla\times\underline{\mathcal{O}}_{22}\right]\right)d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{2\varkappa}\,r_o^6\Big\{Q_c\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2\frac{r_o}{B_{o\varphi}}\Big[\frac{1}{2}\left(i\Psi_2^{2,2\kappa}\right)^{\bullet}+\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\Big\{\left(\mathcal{O}_{22_2}^{0,0}\right)^{\bullet}$$

$$+\,\varkappa\left(\times\mathcal{O}_{22\varphi}^{0,0}\right)^{\bullet}+(1+\varkappa^2)\,i\Psi_2^{2,2\kappa}\Big]\Big\}\Big|_{X=1} \quad .$$

Die von $[P_{00}]$ herkommenden Beiträge fassen wir zusammem und erhalten:

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\int\limits_{S_{00}} 3(\underline{n}_{00}\cdot\underline{\varphi}_1)\Big(-\frac{1}{3}\,\underline{\underline{\varepsilon}}_1\underline{\underline{\varepsilon}}_1\underline{\underline{\varepsilon}}_1 : \nabla\nabla\nabla[P_{00}] - \underline{\underline{\varepsilon}}_1\underline{\underline{\varepsilon}}_{22} : \nabla\nabla[P_{00}]\Big)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\,\varkappa}\,r_0^6\Big[(\varphi_{1r}^{1,K})^2\Big\{5(\varphi_{1r}^{1,K})^2 + (i\varphi_{1\varphi}^{1,K})^2 +$$

$$- 4\,\varphi_{1r}^{1,K}(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet} - 4(r_0\,\varphi_{22r}^{2,2K} + 2\,r_0\,\varphi_{22r}^{0,0})\Big\}\Big]\Big|_{x=1}.$$

Die von $[P_1]$ herkommenden Beiträge fassen wir ebenfalls zusammen und erhalten:

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\int\limits_{S_{00}} 3(\underline{n}_{00}\cdot\underline{\varphi}_1)\Big\{-\underline{\underline{\varepsilon}}_{22}\cdot\nabla[P_1] - \underline{\underline{\varepsilon}}_1\underline{\underline{\varepsilon}}_1 : \nabla\nabla[P_1]\Big\}\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{8\,\varkappa}\,r_0^6\Big[\varphi_{1r}^{1,K}\Big\{3(\varphi_{1r}^{1,K})^2 W_p^{\bullet\bullet} + W_p^{\bullet}\big[4r_0\,\varphi_{22r}^{0,0} + 2r_0\varphi_{22r}^{2,2K} +$$

$$+ \frac{5}{2}(\varphi_{1r}^{1,K})^2 + 4\,\varphi_{1r}^{1,K}(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet} - \frac{1}{2}(i\varphi_{1\varphi}^{1,K})^2\big] +$$

$$+ W_p\Big[\frac{1}{2}\,\varphi_{1r}^{1,K}(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet\bullet} - \frac{5}{2}\,\varphi_{1r}^{1,K}(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet} +$$

$$- \frac{3}{2}\{(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet}\}^2 - 2(\varphi_{1r}^{1,K})^2 + (\chi r_0\,\varphi_{22r}^{2,2K})^{\bullet}\Big]\Big\}\Big]\Big|_{x=1}$$

mit

$$W_p\Big|_{x=1} := \Big[Q_c^2\,\varphi_{1r}^{1,K}\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1) + Q_c(i\varphi_{1\varphi}^{1,K} + b_c\,i\varphi_{1z}^{1,K}) + 2\,\varphi_{1r}^{1,K}\Big]\Big|_{x=1}$$

$$W_p^{\bullet}\Big|_{x=1} := \Big[Q_c \Big\{ \varphi_{1r}^{1,K} \left(Q_c - 2\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1) \right) + (i\varphi_{1\varphi}^{1,K})^{\bullet} + i\varphi_{1\varphi}^{1,K} + \\ + \mathcal{B}_c (i\varphi_{12}^{1,K})^{\bullet} \Big\} + 2\Big\{ (\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet} + \varphi_{1r}^{1,K} \Big\} \Big]\Big|_{x=1}$$

und

$$W_p^{\bullet\bullet}\Big|_{x=1} := \Big[Q_c\, \varphi_{1r}^{1,K} \Big(\big\{ 6 + Q_c (1+\varkappa^2) \big\} \widetilde{G}_1(\varkappa,1) - 4 - Q_c \Big) + \\ + Q_c \Big((i\varphi_{1\varphi}^{1,K})^{\bullet\bullet} + 2 (i\varphi_{1\varphi}^{1,K})^{\bullet} + \mathcal{B}_c (i\varphi_{12}^{1,K})^{\bullet\bullet} \Big) + \\ + 2 (\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet} + 4 (\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet\bullet} \Big]\Big|_{x=1} .$$

Der letzte, von $[P_{22}]$ herrührende Beitrag wird mit Hilfe von Gleichung (8.09) wie folgt zerlegt:

$$\frac{r_o^7}{12\, B_{o\varphi}^2} \int\limits_{S_{oo}} 3 (\underline{n}_{oo} \cdot \underline{\varphi}_1)(-\underline{f}_1 \cdot \nabla [P_{22}])\, d\sigma =$$

$$= \frac{r_o^7}{12\, B_{o\varphi}^2} \int\limits_{S_{oo}} 3 (\underline{n}_{oo} \cdot \underline{\varphi}_1) \Big\{ -\underline{\varphi}_1 \cdot \nabla \big[\underline{B}_{oo}^{\vee} \cdot (\nabla \times \underline{\alpha}_{22}) + (\nabla \Psi_1)^2 \big] \Big\} d\sigma +$$

$$+ \frac{r_o^7}{12\, B_{o\varphi}^2} \int\limits_{S_{oo}} 3 (\underline{n}_{oo} \cdot \underline{\varphi}_1) \Big\{ \underline{\varphi}_1 \cdot \nabla \big(\underline{B}_{10} (\underline{\varphi}_1) \big]^2 \big) \Big\} d\sigma +$$

$$+ \frac{r_o^7}{12\, B_{o\varphi}^2} \int\limits_{S_{oo}} 3 (\underline{n}_{oo} \cdot \underline{\varphi}_1) \Big\{ \underline{\varphi}_1 \cdot \nabla \Big[\mathcal{P}_{10} (\underline{\varphi}_{22}) + \mathcal{P}_1 (\underline{\varphi}_1, \mathcal{P}_{10} (\underline{\varphi}_1)) + \\ + \underline{B}_{oo} \cdot \big(\underline{B}_{10} (\underline{\varphi}_{22}) + \underline{B}_1 (\underline{\varphi}_1, \underline{B}_{10} (\underline{\varphi}_1)) \big) \Big] \Big\} d\sigma .$$

Die Auswertung dieser drei Integrale liefert der Reihe nach:

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int_{S_{oo}} 3(\underline{n}_{oo}\cdot\underline{\varphi}_1)\{-\underline{\varphi}_1\cdot\nabla[\underline{B}_{oo}^{\nu}\cdot(\nabla\times\underline{\sigma}_{22})+(\nabla\psi_1)^2]\}\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\,\varkappa}\,r_o^6\Big\{2(\varphi_{1r}^{1,1K})^2\,\frac{r_o}{B_{o\varphi}}\big[(\sigma_{22_z}^{0,0})^{\cdot\cdot}-(\sigma_{22_z}^{0,0})^{\cdot}+\mathcal{B}_c\{\sigma_{22\varphi}^{0,0}+$$

$$-(\sigma_{22\varphi}^{0,0})^{\cdot}-(\sigma_{22\varphi}^{0,0})^{\cdot\cdot}\}\big]+$$

$$-2\big[2\,q_c(\varphi_{1r}^{1,1K})^2+2\,Q_c\,\varphi_{1r}^{1,1K}(\varphi_{1r}^{1,1K})^{\cdot}\big](i\psi_2^{2,2K})+$$

$$-2\,Q_c(\varphi_{1r}^{1,1K})^2(i\psi_2^{2,2K})^{\cdot}-Q_c^2\big[(\varphi_{1r}^{1,1K})^3(\varphi_{1r}^{1,1K})^{\cdot}\{-1+$$

$$+(1+\varkappa^2)\big(\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\big)^2\}+(\varphi_{1r}^{1,1K})^4\{\widetilde{G}_1(\varkappa,1)[4(1+\varkappa^2)+$$

$$+(\varkappa^2-2)\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)]-2\}\big]\Big\}\Big|_{X=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int_{S_{oo}} 3(\underline{n}_{oo}\cdot\underline{\varphi}_1)\big(\underline{\varphi}_1\cdot\nabla\big([\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1)]^2\big)\big)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\,\varkappa}\,r_o^6\;Q_c^2\{\varphi_{1r}^{1,1K}(\varphi_{1r}^{1,1K}+(\varphi_{1r}^{1,1K})^{\cdot})[(i\varphi_{1\varphi}^{1,1K})^2+(i\varphi_{1z}^{1,1K})^2]+$$

$$+(\varphi_{1r}^{1,1K})^2[3(i\varphi_{1\varphi}^{1,1K}(i\varphi_{1\varphi}^{1,1K})^{\cdot}+i\varphi_{1z}^{1,1K}(i\varphi_{1z}^{1,1K})^{\cdot})-(\varphi_{1r}^{1,1K})^2]\}\Big|_{X=1}$$

und

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int_{S_{oo}} 3(\underline{n}_{oo}\cdot\underline{\varphi}_1)\Big\{\underline{\varphi}_1\cdot\nabla\big[\mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_{21})+\mathfrak{P}_1(\underline{\varphi}_1,\mathfrak{P}_{10}(\underline{\varphi}_1))+$$

$$+\underline{B}_{00}\cdot\big(\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_{21})+\underline{B}_1(\underline{\varphi}_1,\underline{B}_{10}(\underline{\varphi}_1))\big)\big]\Big\}\,d\sigma =$$

$$=\frac{\pi^2}{2\varkappa}\,r_o^6\Big\{(\varphi_{1r}^{1,\kappa})^2\big[2r_o\mathcal{D}(1)+2Q_c(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa})^*\big]+$$

$$+(\varphi_{1r}^{1,\kappa})^2\big[\chi r_o\varphi_{22r}^{2,2\kappa}+Q_c(\chi r_o\,i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2\kappa}+b_c r_o\,i\,\varphi_{22z}^{22\kappa})\big]^*+$$

$$+2\varphi_{1r}^{1,\kappa}\big(\varphi_{1r}^{1,\kappa}+(\varphi_{1r}^{1,\kappa})^*\big)\big[\chi r_o\varphi_{22r}^{2,2\kappa}+Q_c\big(\chi r_o\,i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2\kappa}+b_c r_o\,i\,\varphi_{22z}^{2,2\kappa}\big)\big]\Big\}\Big|_{\chi=1}.$$

Als Letztes bleibt jetzt noch der Beitrag von $\underline{\varepsilon}_{33}$ zu σ_T und damit zu $\mathcal{J}_T$ auszuwerten. Das heißt, bis auf einen Faktor muß

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int_{S_{oo}}(-2\underline{B}_1^V)\cdot\underline{\varepsilon}_{33}\,d\sigma$$

berechnet werden.

Mit

$$-2\underline{B}_1^V = 2\frac{B_{o\varphi}}{r_o}Q_c\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\Big|_{S_{oo}}\Big\{\sinh\underline{e}_r+\tilde{G}_1(\varkappa,\chi)(\underline{e}_\varphi+\varkappa\underline{e}_z)\cosh\Big\}$$

und Gleichung (8.10) ergeben sich in der Reihenfolge von Gleichung (8.10) die Teilbeiträge:

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}}\left[\underline{n}_{oo}\times\left(\underline{\mathfrak{F}}_1\cdot\nabla\underline{\sigma}_{22}\right)\right]\cdot\left(-2\,\underline{B}_1^{\vee}\right)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{6\varkappa}\,r_o^6\,Q_c\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\left\{\varphi_{1r}^{1,K}\left[2\,\varphi_{1r}^{1,K}\left(\varkappa\,(\sigma_{22\varphi}^{0,0})^{\bullet}-(\sigma_{22z}^{0,0})^{\bullet}\right)+\right.\right.$$

$$+\varphi_{1r}^{1,K}\left(\varkappa\,(\sigma_{22\varphi}^{2,2K})^{\bullet}-(\sigma_{22z}^{2,2K})^{\bullet}\right)+\varkappa\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,K}\,\sigma_{22r}^{2,2K}\;+$$

$$\left.\left.+2\left(\varphi_{1r}^{1,K}+(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet}\right)\left(\varkappa\,\sigma_{22\varphi}^{2,2K}-\sigma_{22z}^{2,2K}\right)\right]\frac{r_o}{B_{o\varphi}}\right\}\Big|_{X=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}}\left[\underline{n}_{oo}\times\left(\frac{1}{2}\,\underline{\mathfrak{F}}_{22}\cdot\nabla\underline{\sigma}_1\right)\right]\cdot\left(-2\,\underline{B}_1^{\vee}\right)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{12\,\varkappa}\,r_o^6\,Q_c\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\left(\varphi_{1r}^{1,K}\right)^2\Big|_{X=1}\left\{\varkappa\left[(\sigma_{1\varphi}^{1,K})^{\bullet}-F_1'(\varkappa,1)\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[2\,r_o\,\varphi_{22r}^{0,0}+(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet}\,\varphi_{1r}^{1,K}+\frac{1}{4}\left\{4\,r_o\,\varphi_{22r}^{2,2K}-(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,K})^2+(\varphi_{1r}^{1,K})^2\right\}\right]+$$

$$+\left(\varkappa\,\sigma_{1r}^{1,K}+Q_c\right)\left[r_o\,i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2K}+\frac{1}{4}\left\{\varphi_{1r}^{1,K}\,(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,K})^{\bullet}-(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,K}\right\}\right]+$$

$$\left.+\;\varkappa\,Q_c\left[r_o\,i\,\varphi_{22z}^{2,2K}+\frac{1}{4}\left\{\varphi_{1r}^{1,K}\,(i\,\varphi_{1z}^{1,K})-\left(\varphi_{1r}^{1,K}+(\varphi_{1r}^{1,K})^{\bullet}\right)i\,\varphi_{1z}^{1,K}\right\}\right]\right\}\Big|_{X=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}}\left[\underline{n}_{oo}\times\left(\frac{1}{2}\,\underline{\varepsilon}_1\,\underline{\varepsilon}_1:\nabla\nabla\underline{\sigma}_1\right)\right]\cdot\left(-2\,\underline{B}_1^{\nu}\right)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{24\,\varkappa}\,r_o^6\,Q_c\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2\Big|_{x=1}\Big\{3\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)^2\left[\varkappa\left(\sigma_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^{\cdot\cdot}+\right.$$

$$\left.+\,\varkappa\,F_1'(\varkappa,1)-(1+\varkappa^2)\right]-Q_c\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}+\left(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}+\varkappa\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[Q_c\left(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}+\varkappa\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right)+2\,\varkappa\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(F_1'(\varkappa,1)-\left(\sigma_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^{\cdot}\right)\right]+$$

$$+\,\varkappa\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\left[2\,\varkappa\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\,\sigma_{1r}^{1,\kappa}+\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(2\left(\sigma_{1r}^{1,\kappa}\right)^{\cdot}-\sigma_{1r}^{1,\kappa}\right)\right]+$$

$$+\left(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^2\left[2\,\varkappa\,\sigma_{1r}^{1,\kappa}+q_c\right]\Big\}\Big|_{x=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2}\int\limits_{S_{oo}}\left[\underline{n}_1\times\left(\underline{\sigma}_{22}+\underline{\varepsilon}_1\cdot\nabla\underline{\sigma}_1\right)\right]\cdot\left(-2\,\underline{B}_1^{\nu}\right)\,d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{12\,\varkappa}\,Q_c\,r_o^6\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\Big|_{x=1}\Big\{\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\left(i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}-i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}-\varphi_{1r}^{1,\kappa}\right)\left[2\,\varkappa\,\frac{r_o}{B_{o\varphi}}\,\sigma_{22r}^{2,2\kappa}+\right.$$

$$\left.+\,\varphi_{1r}^{1,\kappa}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,\varkappa\left(\sigma_{1r}^{1,\kappa}\right)^{\cdot}+i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\left(\varkappa\,\sigma_{1r}^{1,\kappa}+q_c\right)+\varkappa^2\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\,\sigma_{1r}^{1,\kappa}\right)\right]+$$

$$+\left[4\,\sigma_{22z}^{0,0}+2\,\sigma_{22z}^{2,2\kappa}\right]\frac{r_o}{B_{o\varphi}}\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}+i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)+$$

$$-\left[4\,\sigma_{22\varphi}^{0,0}+2\,\sigma_{22\varphi}^{2,2\kappa}\right]\frac{r_o}{B_{o\varphi}}\,\varkappa\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}+\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,\varkappa\,F_1'(\varkappa,1)+\right.$$

$$\left.-\,3\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}-3\,\varkappa\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right]\left(\varphi_{1r}^{1,\kappa}+i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)-\left[\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,\varkappa\left(\sigma_{1\varphi}^{1,\kappa}\right)^{\cdot}+\right.$$

$$\left.+\,3\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,\kappa}\left(q_c+\varkappa\,\sigma_{1r}^{1,\kappa}\right)+3\,\varkappa\,q_c\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\right]\varphi_{1r}^{1,\kappa}\,i\,\varphi_{1z}^{1,\kappa}\Big\}\Big|_{x=1}$$

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\int\limits_{S_{00}}\frac{1}{2}\left[\underline{n}_{22}\times\underline{\Omega}_{11}\right]\cdot\left(-2\,\underline{B}_1^{\nu}\right)d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{24\,\varkappa}\,Q_c\,r_0^6\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2\Big|_{x=1}\Big\{Q_c\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\left[\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2(1+\varkappa^2)+\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^2\right]+$$

$$+\left[4r_0\varphi_{22r}^{2,2\kappa}+2\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^{*}-\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^{*}\right]Q_c+\left[2r_0\,i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2\kappa}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^{*}-\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^{*}i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)-\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}+2\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\Big]\Big[1+$$

$$\left.-\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\,\varkappa\,\Omega_{1r}^{1,1\kappa}\right]+\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2\left[\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\,\varkappa\,\Omega_{1r}^{1,1\kappa}+q_c\right]\Big\}\Big|_{x=1}$$

$$\frac{r_0^7}{12\,B_{0\varphi}^2}\int\limits_{S_{00}}\frac{1}{2}\left(\underline{n}_{00}\cdot\underline{F}_1\right)\Big[\nabla\times\underline{\Omega}_{22}+2\,\underline{F}_1\cdot\nabla\,\underline{B}_1^{\nu}+\underline{F}_{22}\cdot\nabla\underline{B}_{00}^{\nu}+$$

$$+\,\underline{F}_1\,\underline{F}_1:\nabla\nabla\,\underline{B}_{00}^{\nu}\Big]\cdot\left(-2\,\underline{B}_1^{\nu}\right)d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{12\,\varkappa}\,r_0^6\Big\{\frac{r_0}{B_{0\varphi}}\Big(\left(i\Psi_2^{2,2\kappa}\right)^{*}+2\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\Big[-\left(\Omega_{22z}^{0,0}\right)^{*}+$$

$$+\,\varkappa\left(\Omega_{22\varphi}^{00}+\left(\Omega_{22\varphi}^{0,0}\right)^{*}\right)+(1+\varkappa^2)\,i\,\Psi_2^{2,2\kappa}\Big]\Big)-r_0\,i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2\kappa}+$$

$$-\frac{1}{4}\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^{*}-\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^{*}i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)+\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\Big[\frac{1}{4}\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2+$$

$$-\frac{1}{4}\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^2-r_0\varphi_{22r}^{2,2\kappa}\Big]-2\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\Big[r_0\varphi_{22r}^{0,0}+\frac{1}{4}\Big(\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2+$$

$$+\,2\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^{*}-\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^2\Big)\Big]+\frac{3}{2}\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\,i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}+\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\cdot$$

$$\cdot\Big[3\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2-\frac{1}{2}\left(i\varphi_{1\varphi}^{1,1\kappa}\right)^2\Big]+Q_c\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\Big[\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\left(3\,\widetilde{G}_1^2(\varkappa,1)+1+\right.$$

$$\left.-4\,(1+\varkappa^2)\,\widetilde{G}_1(\varkappa,1)\right)+\left(\chi\,\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^{*}\left(-(1+\varkappa^2)\,\widetilde{G}_1^2(\varkappa,1)+\right.$$

$$\left.+1\right)\Big]\Big\}\Big|_{x=1}\;Q_c\left(\varphi_{1r}^{1,1\kappa}\right)^2\Big|_{x=1}$$

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2} \int\limits_{S_{oo}} (\underline{n}_{oo} \cdot \underline{\xi}_{22} + \underline{n}_1 \cdot \underline{\xi}_1)(\underline{B}_1^v + \underline{\xi}_1 \cdot \nabla \underline{B}_{oo}^v) \cdot (-2\,\underline{B}_1^v)\, d\sigma =$$

$$= -\frac{\pi^2}{12\,\varkappa}\, Q_c\, r_o^6\, \varphi_{1r}^{1,k}\Big|_{x=1} \Big\{ \Big[Q_c\, \varphi_{1r}^{1,k} \big(1 + (1+\varkappa^2)\, \tilde{G}_1(\varkappa,1)\big) +$$

$$+ \tilde{G}_1(\varkappa,1)\, \varphi_{1r}^{1,k} + i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k} \Big] \Big[4 r_o\, \varphi_{22r}^{0,0} + \frac{1}{2}(\varphi_{1r}^{1,k})^2 + 2\,\varphi_{1r}^{1,k}(\varphi_{1r}^{1,k})^{2} +$$

$$- \frac{1}{2}(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2 + 2 r_o\, \varphi_{22r}^{2,2k} \Big] + \Big[Q_c\, \varphi_{1r}^{1,k} \big(3 + (1+\varkappa^2)\, \tilde{G}_1(\varkappa,1)\big) +$$

$$+ \tilde{G}_1(\varkappa,1)\, \varphi_{1r}^{1,k} + 3\,i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k} \Big] \Big[i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k} (\varphi_{1r}^{1,k} + i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k}) + \varkappa\, i\,\varphi_{1z}^{1,k}\, \varphi_{1r}^{1,k} \Big] \Big\}\Big|_{x=1}$$

und

$$\frac{r_o^7}{12\,B_{o\varphi}^2} \int\limits_{S_{oo}} (\underline{n}_1 \cdot \underline{\xi}_{22} + \frac{1}{2}\, \underline{n}_{22} \cdot \underline{\xi}_1)\, \underline{B}_{oo}^v \cdot (-2\,\underline{B}_1^v)\, d\sigma =$$

$$= \frac{\pi^2}{24\,\varkappa}\, Q_c^2\, \tilde{G}_1(\varkappa,1)\, r_o^6\, \varphi_{1r}^{1,k}\Big|_{x=1} \Big\{ (\varphi_{1r}^{1,k} + i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k}) \Big[4 r_o\, i\, \varphi_{22\varphi}^{2,2k} +$$

$$+ \varphi_{1r}^{1,k} (i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k})^\circ - (\varphi_{1r}^{1,k})^\circ\, i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k} \Big] + \varkappa\, \varphi_{1r}^{1,k} \Big[4 r_o\, i\, \varphi_{22z}^{2,2k} +$$

$$+ \varphi_{1r}^{1,k} (i\,\varphi_{1z}^{1,k}) - (x\varphi_{1r}^{1,k})^\circ\, i\,\varphi_{1z}^{1,k} \Big] - \varphi_{1r}^{1,k} \Big[(1+\varkappa^2)(\varphi_{1r}^{1,k})^2 + (i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2 \Big] +$$

$$+ 2\,(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k} + \varkappa\, i\,\varphi_{1z}^{1,k}) \Big[2 r_o\, \varphi_{22r}^{2,2k} + \varphi_{1r}^{1,k} (\varphi_{1r}^{1,k})^\circ + \frac{1}{2}(\varphi_{1r}^{1,k})^2 +$$

$$- \frac{1}{2}(i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k})^2 \Big] + i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k} \Big[\frac{1}{2}\big(\varphi_{1r}^{1,k} (i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k})^\circ - (\varphi_{1r}^{1,k})^\circ\, i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k}\big) +$$

$$+ 2 r_o\, i\, \varphi_{22\varphi}^{2,2k} - 2\,\varphi_{1r}^{1,k} (\varphi_{1r}^{1,k} + i\,\varphi_{1\varphi}^{1,k}) \Big] \Big\}\Big|_{x=1} .$$

8.3. Diskussion der Ergebnisse der nichtlinearen Rechnung für den kompressiblen z-Pinch

Ausgangspunkt der Diskussion ist die nichtlineare Amplitudengleichung (8.02) für $A_1(T)$. Geht man mit $T = \sqrt{\tau} \cdot t$ (7.02) und $\tau = \tau_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ (7.33) in der Gleichung (8.02) wieder von T auf die Zeit t über, so erhält man:

$$\varepsilon \, d^2A_1/dt^2 - \tau \gamma_T^2 \varepsilon A_1 = 2 \vartheta_T \varepsilon^3 A_1^3 \, . \tag{8.11}$$

Definiert man die Amplitude A(t) durch die Entwicklung

$$A(t) = \varepsilon A_1(t) + \varepsilon^2 A_2(t) + \ldots \, , \tag{8.12}$$

so erhält man in erster Ordnung in ε:

$$d^2A/dt^2 - \tau \gamma_T^2 A = 2 \vartheta_T A^3 \tag{8.13}$$

oder nach einer Zeitintegration

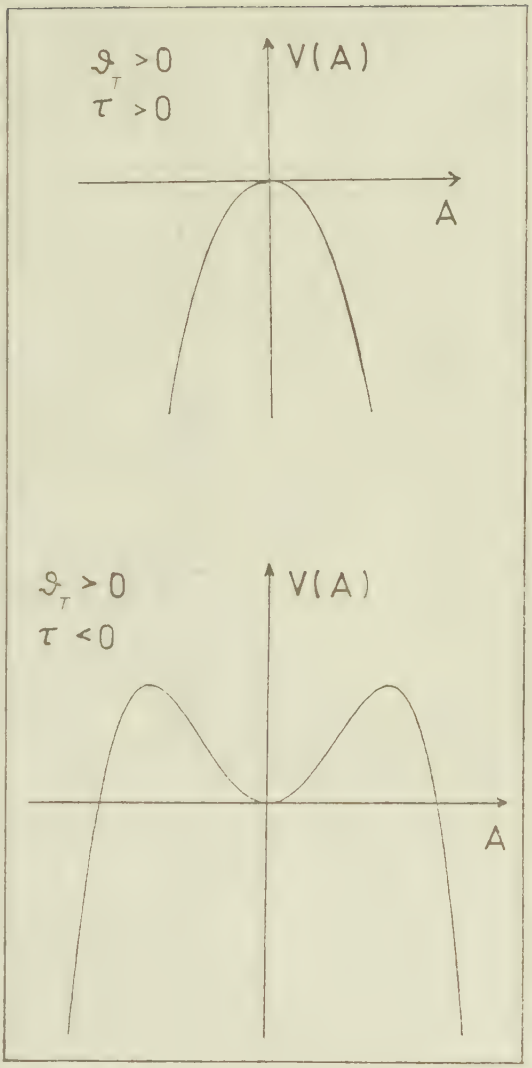
$$\left(dA/dt\right)^2 + V(A) = 0 \tag{8.14}$$

mit

$$V(A) = C_A - \left(\tau \gamma_T^2 A^2 + \vartheta_T A^4\right) \, . \tag{8.15}$$

Es ist naheliegend, das nichtlineare Stabilitätsverhalten an Hand des "Potentials" V(A) zu diskutieren. Da nach (7.01) definitionsgemäß $\gamma_T^2 > 0$ ist, sind in Abhängigkeit vom Vorzeichen von τ nur die beiden Fälle $\vartheta_T > 0$ und $\vartheta_T < 0$ zu unterscheiden. Bei den nachfolgenden Diskussionen sind die Aussagen über lineare beziehungsweise nichtlineare Stabilität oder Instabilität immer so zu verstehen, daß sie jeweils nur für die betrachtete Störung gemeint sind.

Wir betrachten zunächst V(A) für den Fall $\vartheta_T > 0$. Den nebenstehenden Abbildungen kann man entnehmen, daß in diesem Fall ein linear instabiler Zustand ($\tau > 0$) auch nichtlinear instabil ist. Linear stabile Zustände ($\tau < 0$) können dagegen auch nichtlinear instabil werden. Die Voraussetzung hierfür ist, daß die Amplitude der Störung größer als $A_0 = \pm\sqrt{-(\gamma_T^2/2\vartheta_T)\tau}$ wird. Das Verhalten für $\tau < 0$ und $\vartheta_T > 0$ ist in Abbildung 16 ausführlicher dargestellt. In der mittleren Figur sieht man das Auftreten sowohl von beschränkten als auch unbeschränkten Orbits. In dem darunterstehenden Bifurkationsdiagramm sind die abzweigenden Gleichgewichte eingetragen, die offensichtlich instabil sind



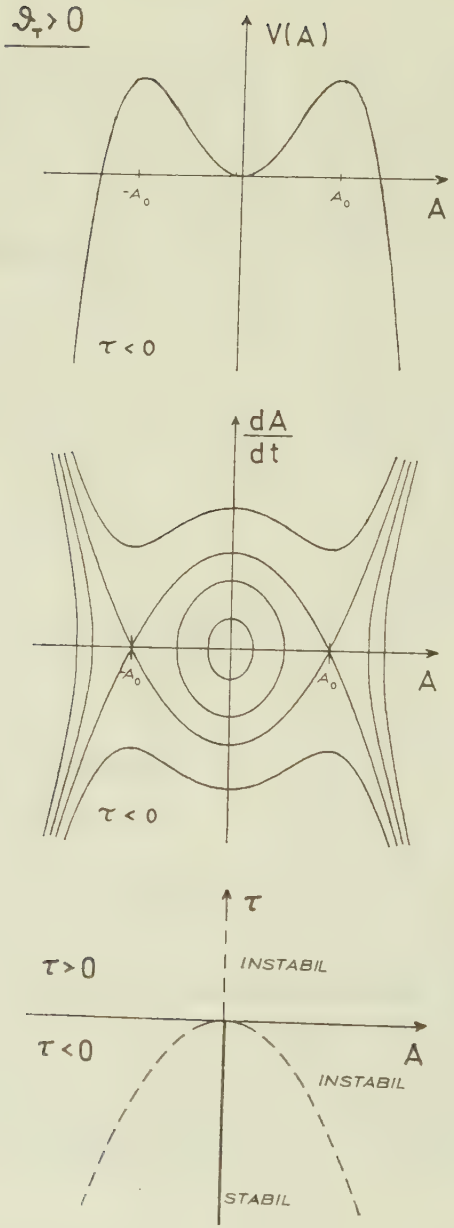
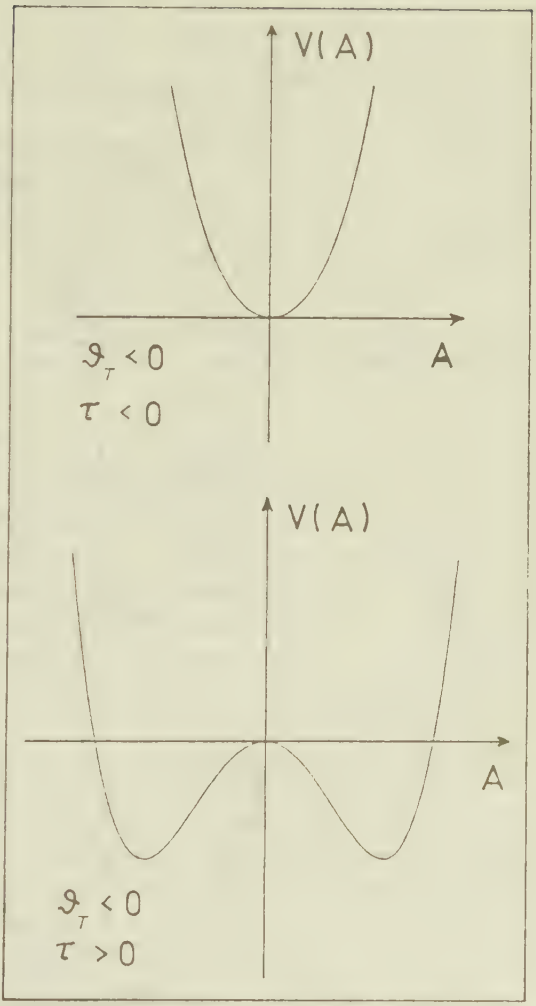


Abb.16: Potential V(A) und Phasendiagramm dA/dt = f(A) für $\tau < 0$, $\vartheta_\tau > 0$; Bifurkationsdiagramm für $\vartheta_\tau > 0$.

Wir betrachten nun den Fall $\vartheta_T < 0$. Den nebenstehenden Abbildungen entnimmt man, daß ein linear stabiler Zustand ($\tau < 0$) auch nichtlinear stabil ist. Linear instabile Zustände ($\tau > 0$) werden nichtlinear stabilisiert. Auch in diesem Fall wird das Verhalten noch einmal ausführlicher in der Abbildung 17 dargestellt. In der obersten Figur ist wieder das Potential V(A) aufgetragen. Darunter sind in der mittleren Figur die möglichen Orbits in Abhängigkeit von C_A dargestellt. Man erkennt nichtlineare Oszillationen entwerder um die die alte Gleichgewichtslage oder um eine der beiden neu abzweigenden, stabilen Gleichgewichtslagen, die durch γ_T^2, ϑ_T und den Abstand von der marginalen Grenze gemäß $A_0 = \pm\sqrt{-(\gamma_T^2/2\vartheta_T)\tau}$ bestimmt sind. Im untenstehenden Bifurkationsdiagramm sind schematisch die abzweigenden Gleichgewichte wiedergegeben. Diese sind bezüglich der zugrunde gelegten Störung stabil (können aber bzgl. anderer Störungen instabil sein).



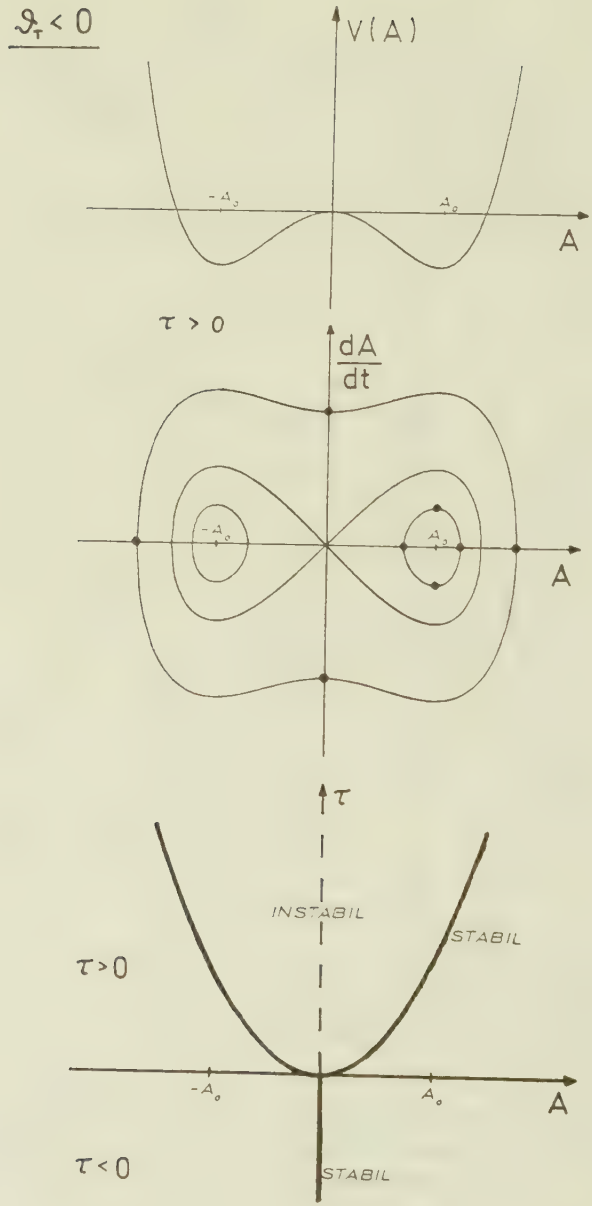


Abb.17: Potential V(A) und Phasendiagramm dA/dt = f(A) für $\tau > 0$, $\vartheta_\tau < 0$; Bifurkationsdiagramm für $\vartheta_\tau < 0$.

Für $C_A = 0$ läßt sich (8.14) elementar integrieren. Man erhält

$$A(t) = 2u / [1 - (\vartheta_T / \tau \gamma_T^2) u^2] \qquad (8.16)$$

$$u(t) = C \exp(\sqrt{\tau}\, \gamma_T t) \qquad (8.17)$$

Für $C_A \neq 0$ läßt sich die Lösung durch elliptische Integrale darstellen, worauf hier allerdings verzichtet werden soll.

Den obigen Ausführungen entnimmt man, daß das Vorzeichen von ϑ_T über das nichtlineare Stabilitätsverhalten der betrachteten Mode entscheidet.

Entsprechend ist in den Abbildungen 18 und 19 für die marginale Grenze $q_{c1} = q_{c2}(x_w^2, \varkappa)$ das nichtlineare Stabilitätsverhalten durch Angabe des Vorzeichens von ϑ_T wiedergegeben. In den schraffierten Bereichen ist $\vartheta_T > 0$. Die expliziten Werte von ϑ_T in Abhängigkeit von $\varkappa$ und x_w sind den Abbildungen 20 bis 24 zu entnehmen. Da ϑ_T für $\varkappa = 0$ für alle Werte x_w verschwindet, ist in Abbildung 25 $\partial\vartheta_T / \partial\varkappa$ für $\varkappa = 0$ aufgetragen. Betrachten wir unsere Zylinderkonfiguration als topologischen Torus, so sind nur $\varkappa$ - Werte aus dem Bereich $0 \leq \varkappa \leq 1$ möglich. Für diese $\varkappa$ - Werte ist die Abhängigkeit des Vorzeichens von ϑ_T von x_w in Abbildung 26 noch in anderer Form dargestellt (Bereiche mit $\vartheta_T > 0$ sind wieder schraffiert). Speziell für $\varkappa = 0$ findet man, daß der normierte Abstand der ideal leitenden Wand von der Plasmaoberfläche größer als 1.56 sein muß, damit die m = 1, n = 1 Kink - Mode nichtlinear stabilisiert werden kann. Dieses Ergebnis kann mit Werten von Rutherford et al. /7/ und Strauss /10/ verglichen werden, die nichtlineare Rechnungen für den leichter zu behandelnden Spezialfall $\varkappa \equiv 0$ durchgeführt haben. Dort wurde für $q = q_{c2}(x_w^2, \varkappa = 0)$ als nichtlineares Stabilitätskriterium $x_w > 1/0.7 \approx 1.43$ beziehungsweise $x_w > 1/0.65 \approx 1.54$ gefunden. Das erstgenannte Ergebnis von Rutherford et al. weicht leicht von

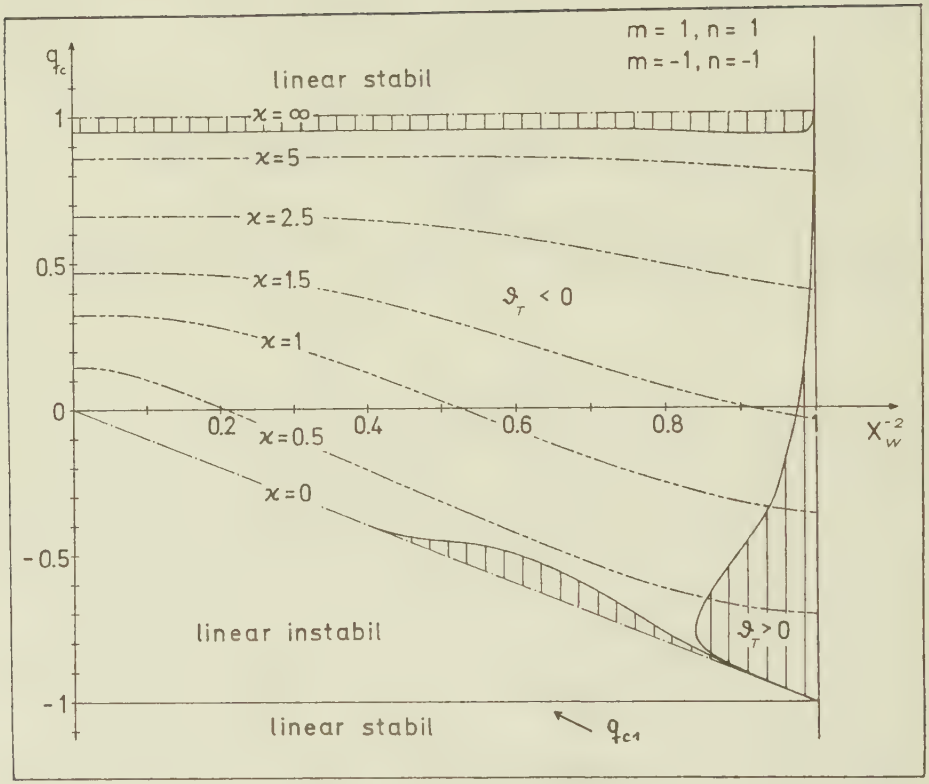


Abb.18: Abhängigkeit des Vorzeichens von ϑ_T ($\vartheta_T > 0$ schraffiert) von X_w^{-2} und $\varkappa$ für $q_c = q_{c2}$ und $m \cdot n = 1$.

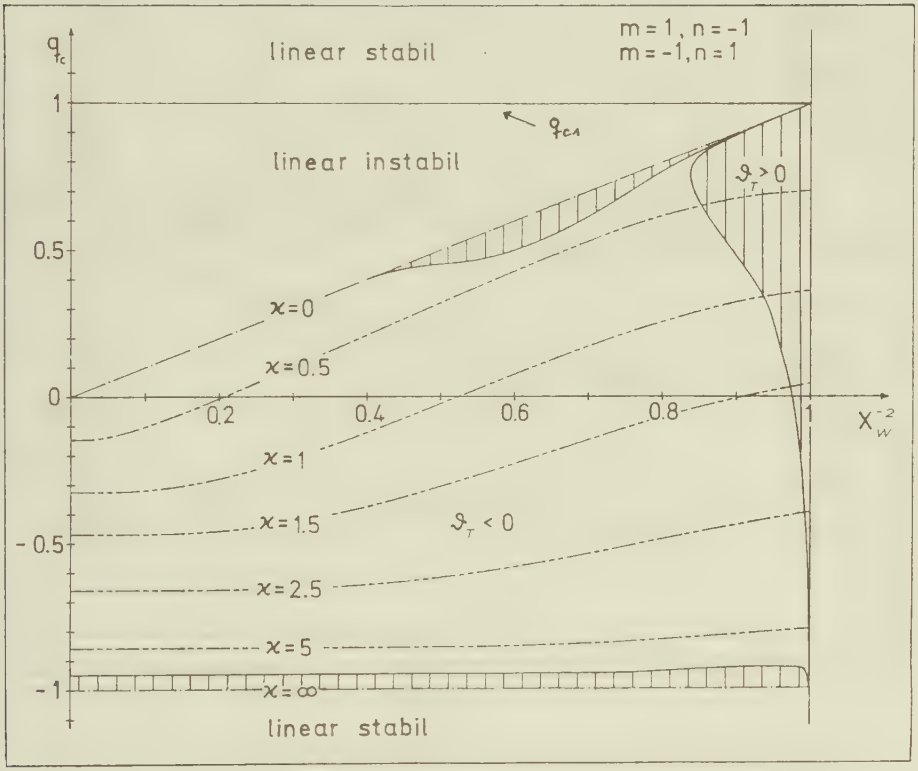


Abb.19: Abhängigkeit des Vorzeichens von ϑ_T ($\vartheta_T > 0$ schraffiert) von x_ω^{-2} und $\varkappa$ für $q_c = q_{c2}$ und $m \cdot n = -1$.

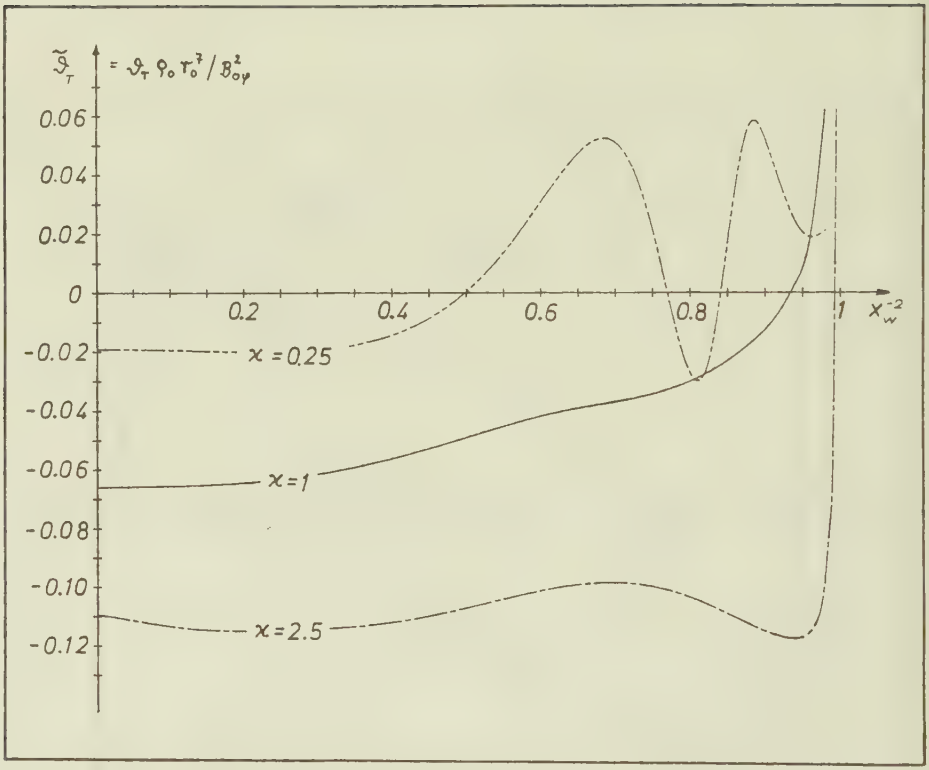


Abb.20: ϑ_T als Funktion von x_w^{-2} für $q = q_{c2}$.

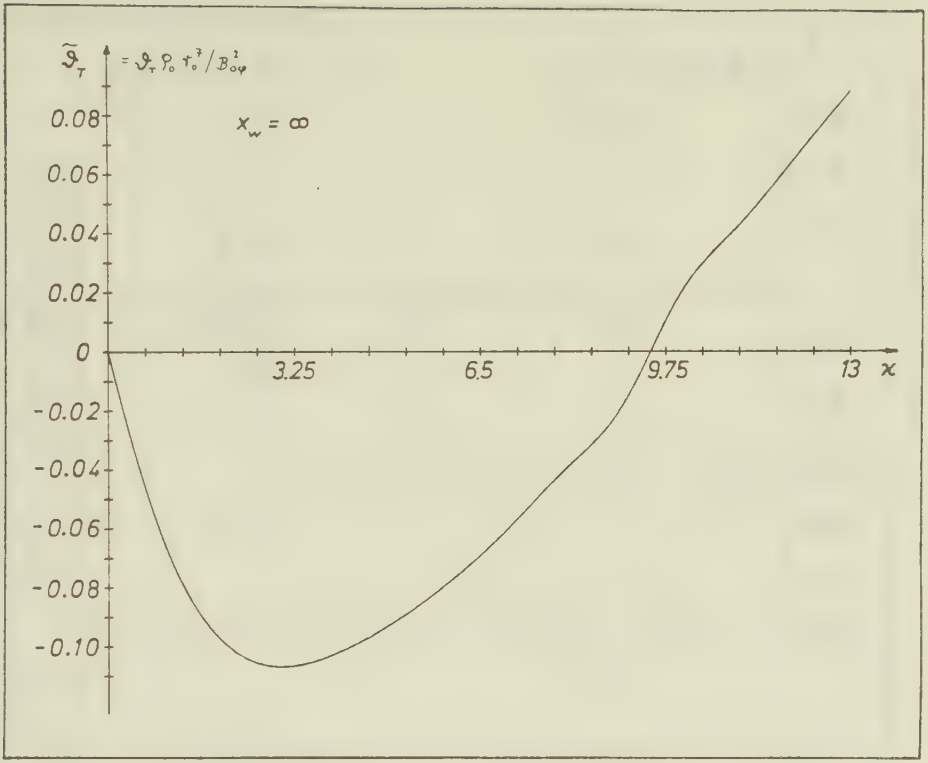


Abb.21: $\tilde{\vartheta}_T$ als Funktion von $\varkappa$ für $q = q_{c1}$.

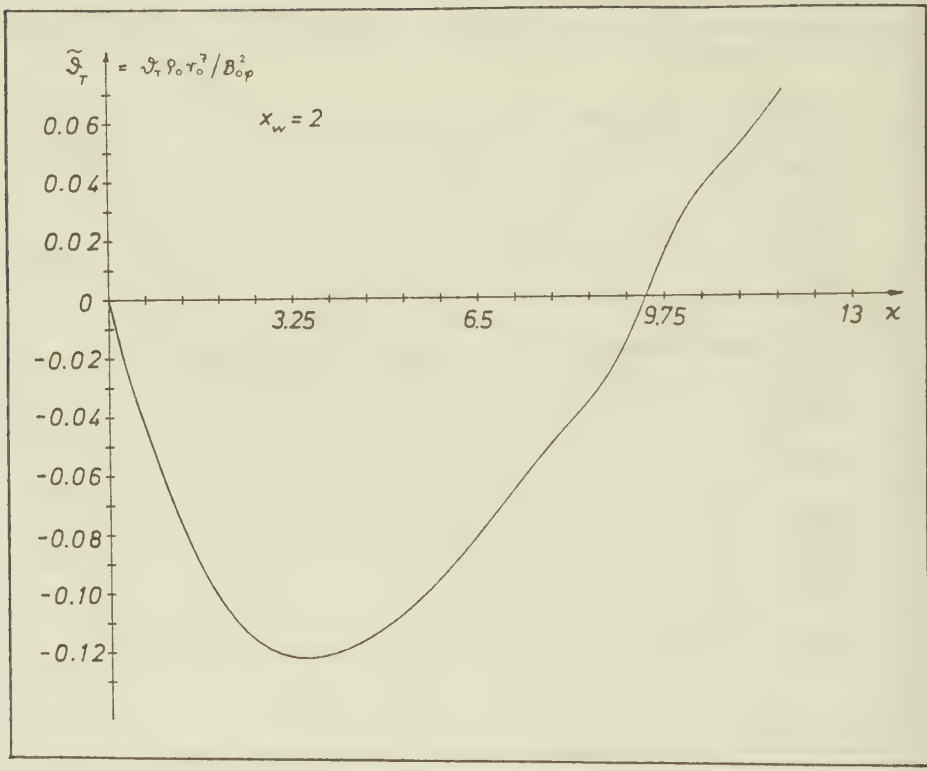


Abb.22: ϑ_T als Funktion von x für $q = q_{c2}$.

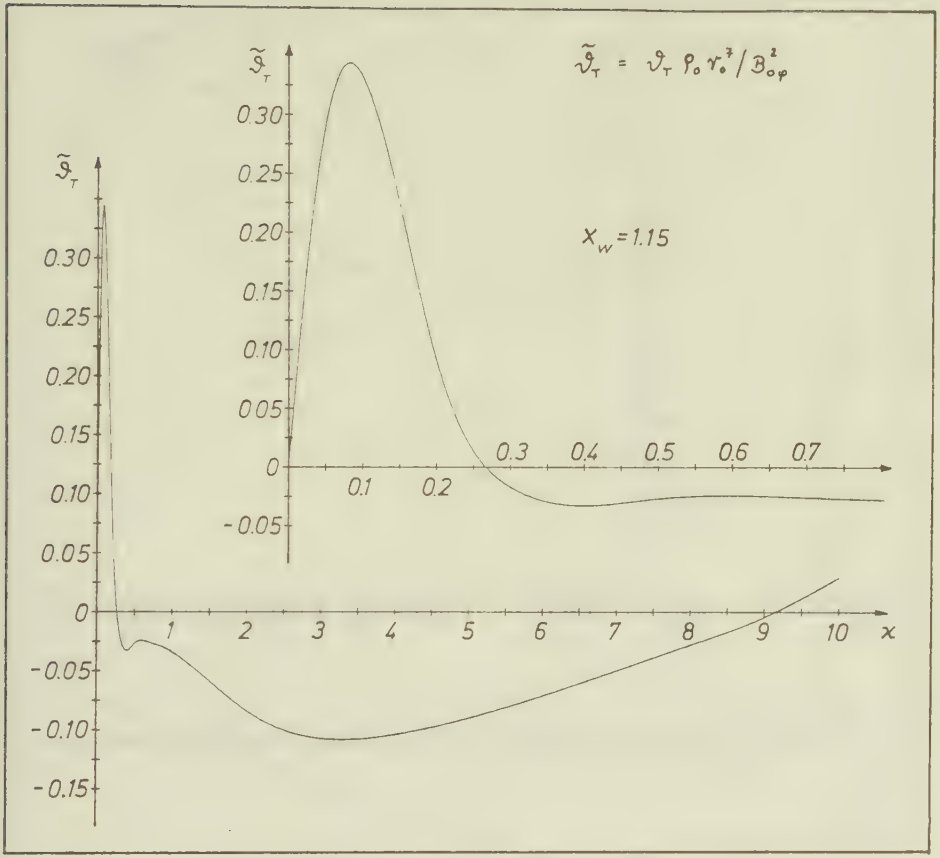


Abb.23: ϑ_T als Funktion von x für $q = q_{c2}$.

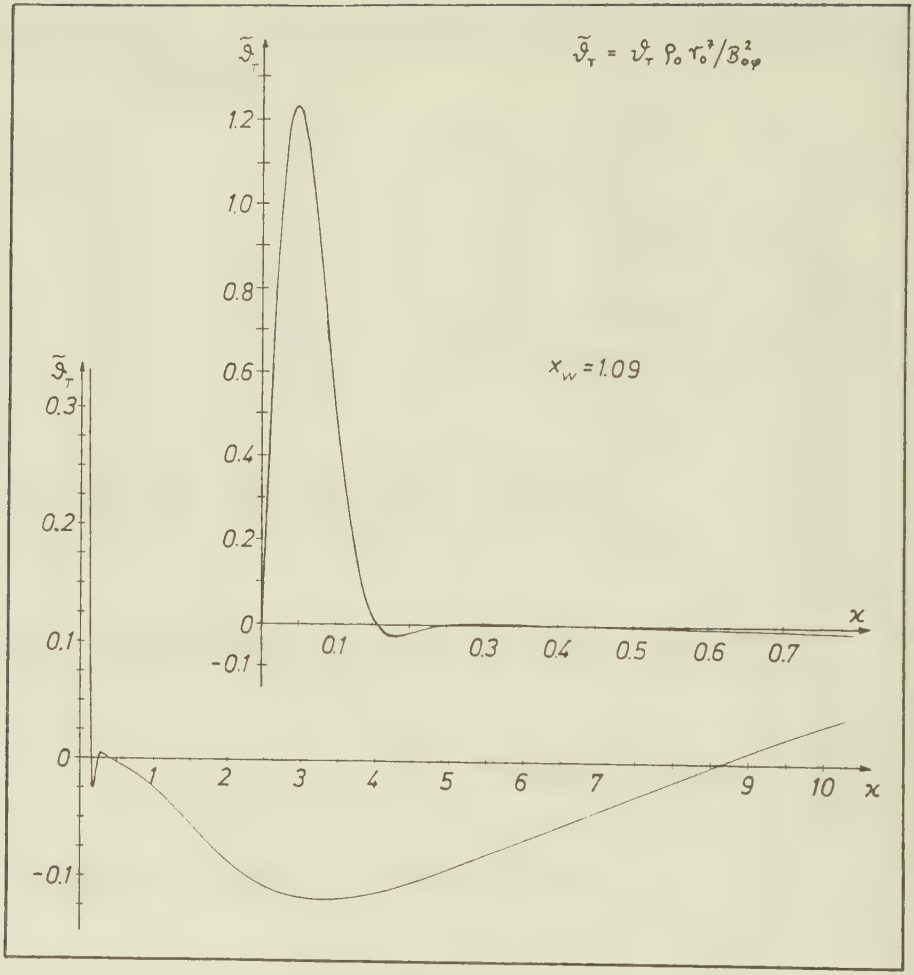


Abb.24: ϑ_τ als Funktion von $\varkappa$ für $q = q_{c2}$.

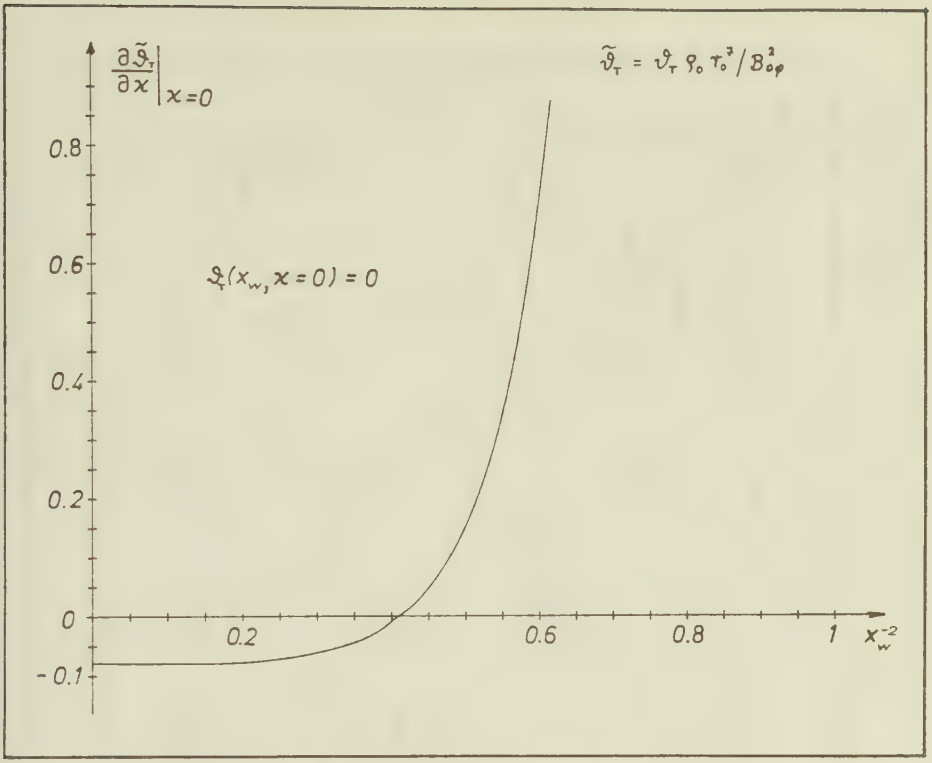


Abb.25: $\partial \vartheta_T / \partial x|_{x=0}$ als Funktion von x_w^{-2} für $q_{cz} = \pm x_w^{-2}$.

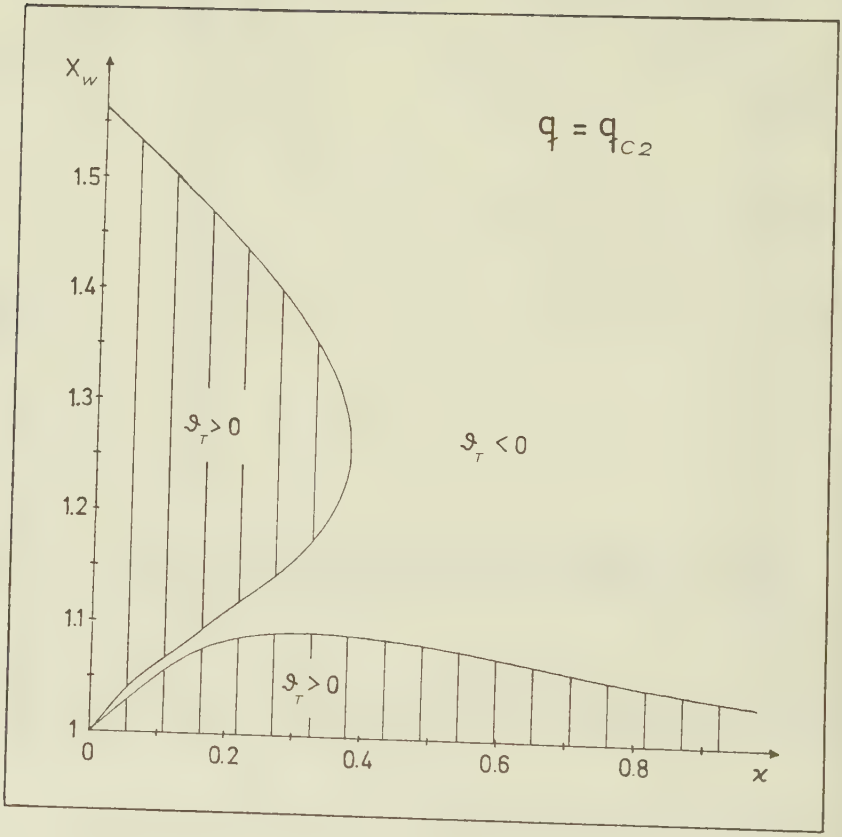


Abb.26: Abhängigkeit des Vorzeichens von ϑ_T von α und x_w für $q = q_{c2}$.

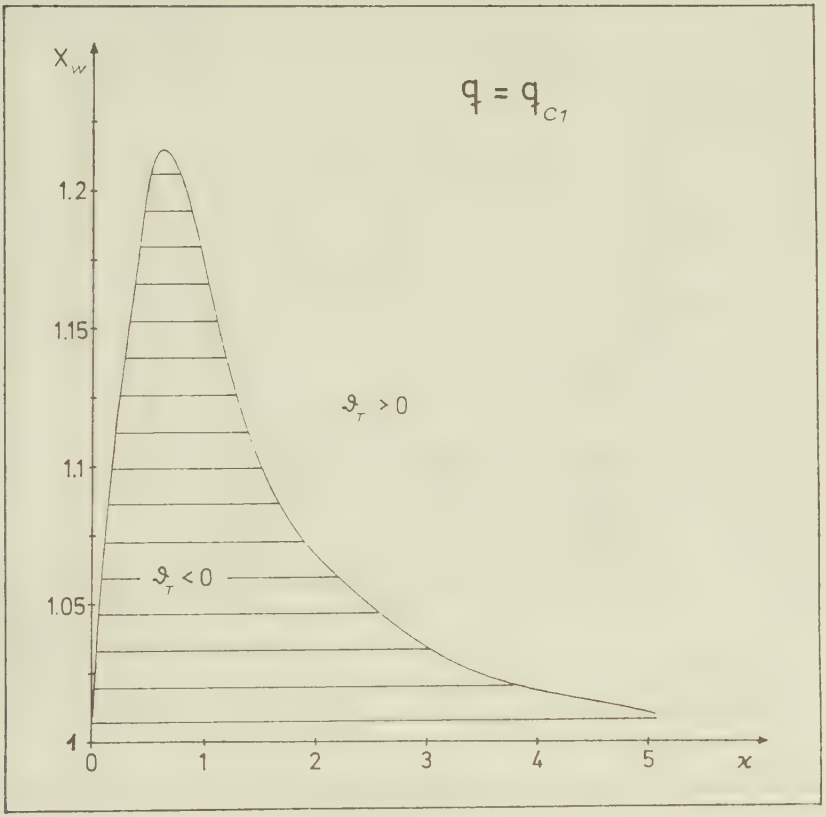


Abb. 27: Abhängigkeit des Vorzeichens von ϑ_T von x und x_w für $q = q_{c1}$.

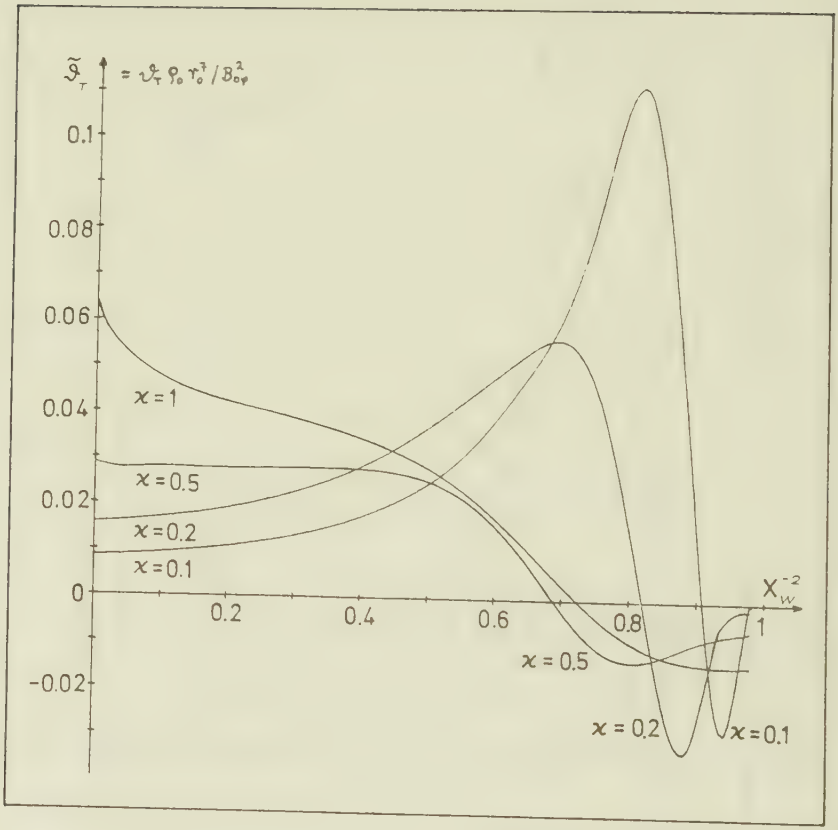


Abb.28: ϑ_T als Funktion von x_w^{-2} für $q = q_{c1}$.

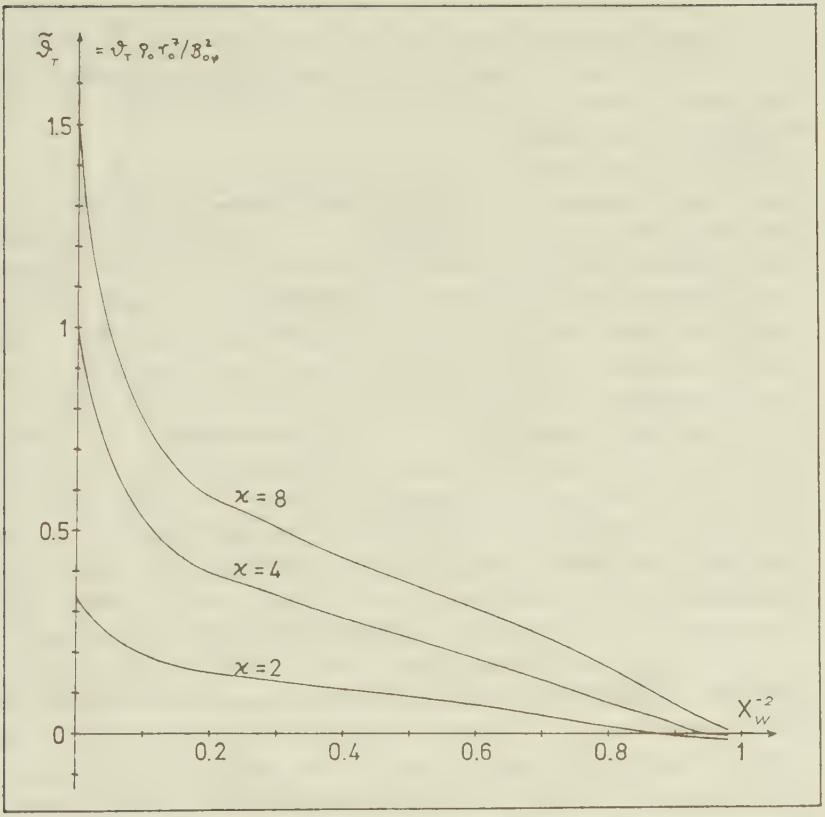


Abb.29: $\tilde{\vartheta}_T$ als Funktion von x_w^{-2} für $q = q_{c1}$.

unserem Ergebnis ab. Dies mag dadurch bedingt sein, daß in /4/ nicht alle nichtlinearen Randbedingungen an der verschobenen Plasmaoberfläche ausgewertet worden sind. Das zweite Ergebnis von Strauss wurde für ein Modell, das auch Oberflächenströme zuläßt, erhalten. Da jedoch keine explizite Abhängigkeit von der Stärke des Oberflächenstroms auftritt, scheint es mit unserem Ergebnis vergleichbar.

Die bisher behandelten Stabilitätsgrenzen $q_{c1} = q_{c1}(x_w^{-2}, \varkappa)$ sind physikalisch weniger interessant, da sie in einem Parameterbereich liegen, in dem andere Moden stets linear instabil sind. Die physikalisch interessante Grenze ist durch q_{c4} ($|q_{c4}| = 1$) gegeben. Durch sie wird (wie sich auch experimentell zeigt) der mögliche Arbeitsbereich eines Tokamaks begrenzt. Die Ergebnisse, die man an dieser Grenze für die m = 1, n = 1 Kink - Mode erhält, sind in den Abbildungen 27 - 29 wiedergegeben. Für normierte Wandabstände größer als $x_{w_{max}} = 1.214$ erhält man für alle $\varkappa$ - Werte nichtlineare Destabilisierung. Für Wandabstände $x_w < x_{w_{max}}$ kann man der Abbildung 27 die $\varkappa$ - Werte entnehmen, für die nichtlineare Stabilisierung ($\vartheta_T < 0$) auftritt. Der größte Wandabstand $x_{w_{max}}$, für den die m = 1, n = 1 Kink - Mode an der Grenze q_{c4} gerade noch nichtlinear stabilisiert werden kann, wird für $\varkappa = x_{w_{max}}^{-2} = 0.679$ realisiert. Wenn die Wand das Plasma fast berührt, findet man für nahezu alle $\varkappa$ - Werte nichtlineare Stabilisierung. Für $\varkappa = 0$ und $x_w = 1$ ist $\vartheta_T = 0$. Für einen Tokamak mit kleinem inversen Aspektverhältnis bedeuten diese Ergebnisse, daß es einen kleinen, optimalen Wandabstand gibt. Dieser bestimmt sich aus der Lage des Minimums der Kurven $\vartheta_T(x_w^{-2})$ der Abbildung 28. Denn für diesen Wandabstand ist die auftretende nichtlineare Stabilisierung der betrachteten Mode am größten.

Wir halten noch fest, daß an der marginalen Grenze q_{c4} die winkelabhängigen Störmagnetfelder sowohl im Plasma als auch im Vakuum verschwinden. Nach /9/ finden wir somit für die Magnetfelder im Plasma beziehungsweise im Vakuum

$$\underline{\tilde{\mathcal{B}}} = \underline{\mathcal{B}}_{00} + \frac{1}{2} A^2(t)\, \underline{\mathcal{B}}_{22}^{0,0}$$

$$= \left(1 + A^2(t)\, \frac{C_{01} + 3\,\varphi_{1r}^{1,K}\,(\times \varphi_{1r}^{1,K})^{*}/2}{r_0^2\left([5+3\beta_c^2]/2 - \chi^2\right)}\right) \underline{\mathcal{B}}_{00} + \tau\, \underline{\mathcal{B}}_{01} \qquad (8.18)$$

beziehungsweise

$$\underline{\tilde{\mathcal{B}}}^{V} = \underline{\mathcal{B}}_{00}^{V} + \frac{1}{2} A^2(t)\, \underline{\mathcal{B}}_{22}^{V\,0,0}$$

$$= \mathcal{B}_{0\varphi}\left\{\left(1 - A^2(t)\,\frac{C_z}{2 r_0^2}\right) \underline{e}_{\varphi} + \left(A^2(t)\,\frac{C_{\varphi}}{r_0^2} + \beta_c\right) \underline{e}_z\right\} + \tau\, \underline{\mathcal{B}}_{01}^{V} \qquad (8.19)$$

Die numerische Berechnung der Konstanten C_{φ} und C_z zeigt, daß der Übergang von $\vartheta_T > 0$ nach $\vartheta_T < 0$ an der Grenze q_{c1} eng mit einem Vorzeichenwechsel von C_{φ} und C_z verbunden ist. Es sind relativ gut die Relationen

$$\vartheta_T > 0 \quad \Longrightarrow \quad C_{\varphi} < 0 \quad , \quad C_z > 0$$

und

$$\vartheta_T < 0 \quad \Longrightarrow \quad C_{\varphi} > 0 \quad , \quad C_z < 0$$

erfüllt. Dies bedeutet nach (8.19), daß der Übergang von $\vartheta_T > 0$ nach $\vartheta_T < 0$ für die betrachtete Mode mit einer Schwächung des axialen Magnetfeldes $\mathcal{B}_z^V$ ($b_c = -\varkappa^{-1}$ für $q_{c1} = -1$) und einer Verstärkung des poloidalen Feldes B_{φ}^V verbunden ist.

Die nichtlineare m=1, n=1 Kink - Mode ist nach (7.09), (7.10), (7.31), (7.33) und (7.47) durch

$$\underline{F}(\underline{r}, t) = A(t)\, \underline{F}_1(\underline{r}) + \frac{1}{2} A^2(t)\, \underline{F}_2(\underline{r}) \qquad (8.20)$$

gegeben. Dabei sind die kartesischen Komponenten von $\underline{F}_1(\underline{r})$ und $\underline{F}_2(r)$ durch die folgenden Ausdrücke gegeben.

$$F_{1x} = \frac{1}{2}\left(F_1^{-} \cos(kz) + F_1^{+} \cos(2\varphi + kz)\right)$$

$$F_{1Y} = \frac{1}{2}\left(-F_1^{-} \sin(kz) + F_1^{+} \sin(2\varphi + kz)\right) \qquad (8.21)$$

$$F_{1z} = i\,\varphi_{1z}^{1,K} \sin(\varphi + kz)$$

mit

$$\mathfrak{F}_1^+ := \varphi_{1r}^{1,K} + i\,\varphi_{1\varphi}^{1,K}$$

$$\mathfrak{F}_1^- := \varphi_{1r}^{1,K} - i\,\varphi_{1\varphi}^{1,K} \qquad (8.22)$$

und

$$\mathfrak{F}_{2x} = \mathfrak{F}_{22r}^{0,0}\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{F}_2^-\cos(\varphi+2Kz) + \mathfrak{F}_2^+\cos(3\varphi+2Kz)\right)$$

$$\mathfrak{F}_{2y} = \mathfrak{F}_{22r}^{0,0}\sin(\varphi) + \frac{1}{2}\left(-\mathfrak{F}_2^-\sin(\varphi+2Kz) + \mathfrak{F}_2^+\sin(3\varphi+2Kz)\right) \qquad (8.23)$$

$$\mathfrak{F}_{2z} = \mathfrak{F}_{22z}^{2,2K}\sin(2\varphi+2Kz)$$

mit

$$\mathfrak{F}_{22r}^{0,0} = r_0\,\varphi_{22r}^{0,0} - \frac{1}{4\varkappa}\left[\left(\mathfrak{F}_1^+\right)^2 + \left(\mathfrak{F}_1^+ + \mathfrak{F}_1^-\right)\varkappa\times i\,\varphi_{1z}^{1,K}\right]$$

$$\mathfrak{F}_2^+ := r_0\left(\varphi_{22r}^{2,2K} + i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2K}\right) + \frac{1}{4\varkappa}\left[\left(i\,\varphi_{1z}^{1,K}\right)^2 - 2\,\mathfrak{F}_1^+\,\mathfrak{F}_1^-\right]$$

$$\mathfrak{F}_2^- := r_0\left(\varphi_{22r}^{2,2K} - i\,\varphi_{22\varphi}^{2,2K}\right) - \frac{1}{4\varkappa}\left(i\,\varphi_{1z}^{1,K}\right)^2 \qquad (8.24)$$

$$\mathfrak{F}_{22z}^{2,2K} = r_0\,i\,\varphi_{22z}^{2,2K} + \frac{1}{8\varkappa}\left[\left(\mathfrak{F}_1^+ - \mathfrak{F}_1^- + 2\varkappa\times i\,\varphi_{1z}^{1,K}\right) i\,\varphi_{1z}^{1,K} + \left(\mathfrak{F}_1^+ + \mathfrak{F}_1^-\right)\times\left(i\,\varphi_{1z}^{1,K}\right)^*\right]$$

Für z = 0 zeigt die Abbildung 30 für drei typische Fälle den nichtlinearen Anteil $\underline{\mathfrak{F}}_2$ des Verschiebungsfeldes in der x - y - Ebene. In der obersten Figur überwiegt der kompressible Anteil der Störung, in der mittleren Figur sind der kompressible und der inkompressible Anteil vergleichbar, und in der untersten Figur dominiert der inkompressible Anteil. Beim Übergang von $\vartheta_T > 0$ nach $\vartheta_T < 0$ treten an beiden Stabilitätsgrenzen keine signifikanten Änderungen des nichtlinearen Verschiebungsfeldes (8.20) auf.

Die Abbildungen 31 und 32 zeigen schließlich für zwei nichtlinear stabile Fälle die durch die nichtlineare Verschiebung des Plasmarandes bedingten Änderungen des Plasmaquerschnitts in der x - y - Ebene als Funktion der Zeit.

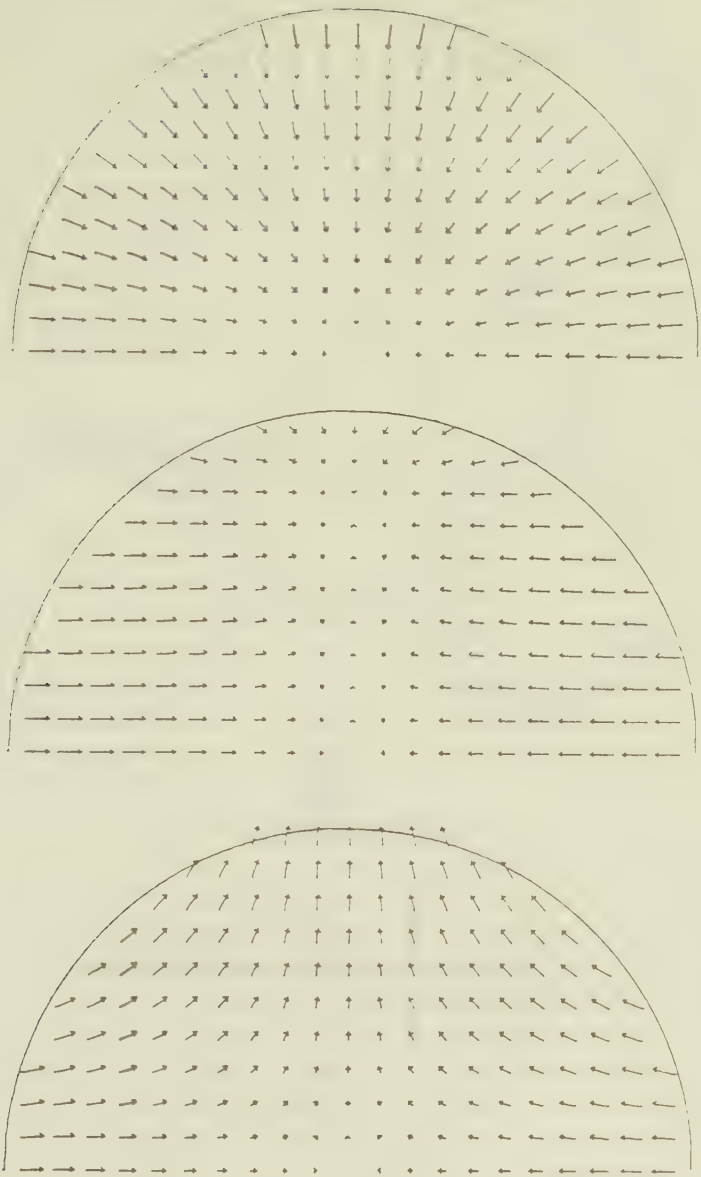


Abb 30: Darstellung des nichtlinearen Anteils $\underline{f}_2$ des Verschiebungsfeldes $\underline{f}$ in der x - y - Ebene für drei charakteristische Fälle.

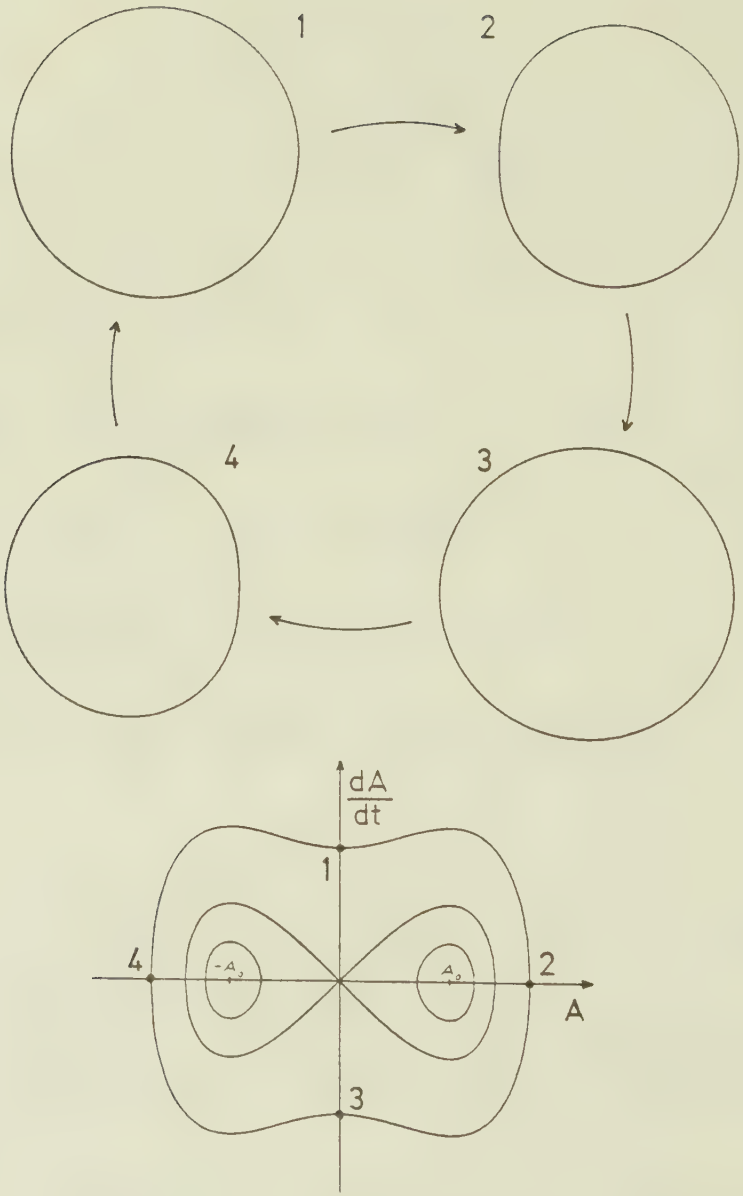


Abb.31: Änderung des Plasmaquerschnitts für eine nichtlinear stabile Konfiguration als Funktion der Zeit.

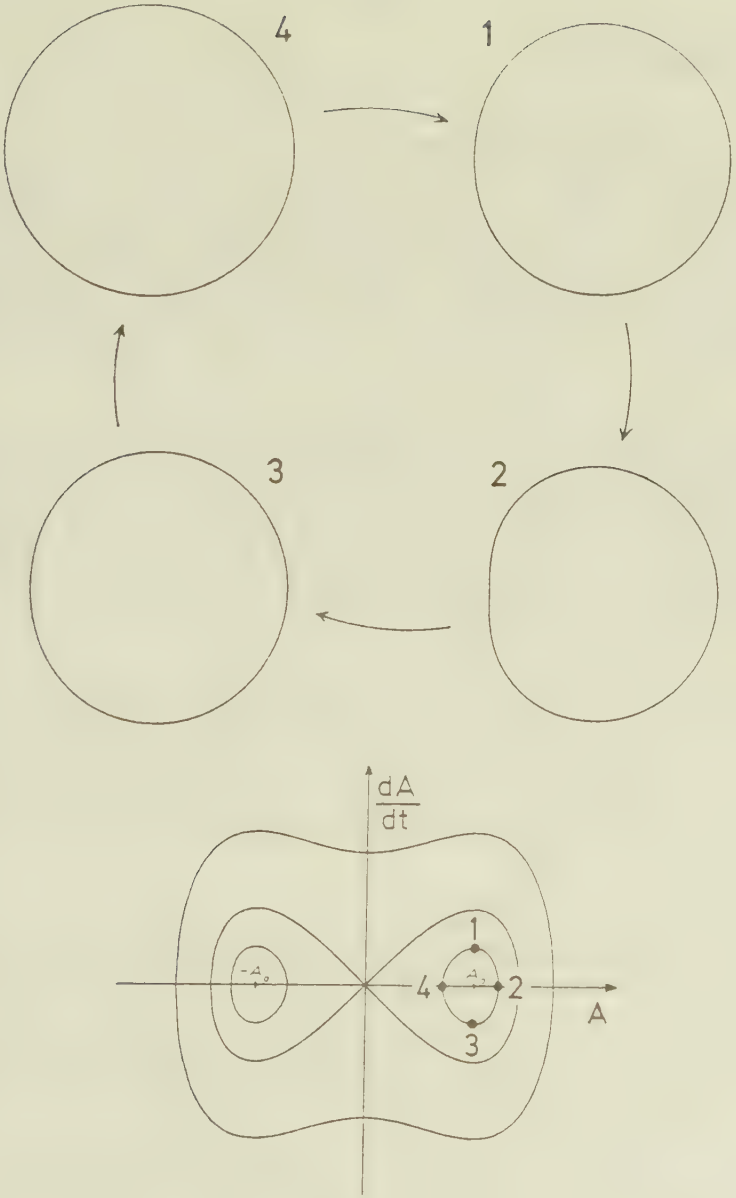


Abb.32: Änderung des Plasmaquerschnitts für eine nichtlinear stabile Konfiguration als Funktion der Zeit.

9. Zusammenfassung

Zunächst wurde ein Näherungsverfahren zur Lösung des linearen Eigenmodenproblems der idealen MHD in der Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze angegeben. Dieses erlaubt es unter anderem, allein aus der Kenntnis der marginalen Mode, deren Bestimmung oftmals einfacher ist als die exakte Lösung des vollständigen linearen Eigenmodenproblems, eine Näherung für die Anwachsraten anzugeben.

Für die Stabilitätsuntersuchungen wurde eine zylindrische Plasmakonfiguration mit kreisförmigem Querschnitt, konstantem Stromprofil und mit konstantem axialen Magnetfeldfeld gewählt, die von einem Vakuumgebiet umgeben ist, das von einer konzentrischen, ideal leitenden Wand begrenzt wird. Dieses Plasmamodell kann als Approximation einer Tokamakkonfiguration mit sehr großem Aspektverhältnis betrachtet werden.

Das lineare Stabilitätsverhalten dieser, als kompressibel angenommenen Konfiguration bezüglich axialsymmetrischer Störungen wurde mit dem oben angesprochenen Näherungsverfahren untersucht. Die so erhaltenen Ergebnisse wurden mit denen der exakten Lösung des linearen Eigenmodenproblems verglichen, die ebenfalls bestimmt werden konnte.

Weiterhin wurde das Näherungsverfahren zur Untersuchung des linearen Stabilitätsverhaltens der oben beschriebenen Plasmakonfiguration bezüglich der m = 1, n = 1 Kink - Mode angewandt. Dabei wurde das Plasma als inkompressibel betrachtet, um die Resultate mit den bekannten Ergebnissen der exakten Lösung des linearen Eigenmodenproblems vergleichen zu können..

Die Untersuchung des nichtlinearen Stabilitätsverhaltens der m = 1, n = 1 Kink - Mode basierte auf den Arbeiten von E. Rebhan über die nichtlineare Entwicklung idealer MHD - Moden in der

Nähe der marginalen Stabilitätsgrenze /8, 9/ und wurde für den realistischeren Fall des kompressiblen Plasmas durchgeführt.

Die Ergebnisse der Betrachtung der m = 1, n = 1 Kink - Mode lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Es existieren zwei marginale Stabilitätsgrenzen, die durch $q_{c4} = -1$ und $q_{c4} = q_{c4}(x \to \infty)$ gegeben sind. An der zweiten Stabilitätsgrenze war für den Spezialfall unendlichen Aspektverhältnisses ein Vergleich mit nichtlinearen Rechnungen von Rutherford et al. /7/ und Strauss /10/ möglich, der eine gute Übereinstimmung der Resultate ergab. Die erste marginale Stabilitätsgrenze ($q_{c4} = -1$) ist als die physikalisch interessante Grenze anzusehen, da spätestens durch sie der mögliche Arbeitsbereich eines Tokamaks begrenzt wird /2/. Es zeigte sich, daß hier für sehr kleine Wandabstände die betrachtete m=1, n=1 Kink - Mode nichtlinear stabilisiert werden kann. Ist der Durchmesser der ideal leitenden Wand großer als das 1.2-fache des Plasmadurchmessers, so wird diese Kink - Mode nichtlinear destabilisiert. Dies bedeutet ein explosionsartiges Anwachsen dieser Störung.

10. Literaturverzeichnis

/1/ Glenn Bateman, MHD Instabilities, The MIT Press,Cambridge (Mass.) 1978

/2/ J.A. Wesson, Nucl. Fusion 18, 87 (1978)

/3/ Pung Nien Hu, Phys. Fluids 23, 337 (1980)

/4/ P.H. Rutherford, Phys. Fluids 16, 1903 (1973)

/5/ T. Yeh, Phys. Fluids 16, 516 (1973)

/6a/ Y.P. Pao, Phys. Fluids 21, 765 (1978)

/6b/ Y.P. Pao, Commun. Pure Appl. Math. 31, 647 (1978)

/7/ P.H. Rutherford, H.P. Furth, M.N. Rosenbluth, in 'Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research' (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1971), Vol.I, 553

/8/ E. Rebhan, Z. Naturforsch. 37a, 816 (1982)

/9/ E. Rebhan, Z. Naturforsch. 39a, 288 (1984)

/10/ H.R. Strauss, Phys. Fluids 19, 1411 (1976)

/11/ R.I. Taylor, Proc. Phys. Soc. 70B, 31 (1957)

/12/ R.I. Taylor, Proc. Phys. Soc. 70B, 1049 (1957)

/13/ J.P. Freidberg, Reviews of Modern Physics 54, 801 (1982)

/14/ V.D. Shafranov, Zh. Tekh. Fiz. 40, 242 (1970)
(Sov. Phys. - Tech. Phys. 15, 175 (1970))

/15/ E. Kamke, Differentialgleichungen I, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig (1967)

/16/ I.B. Bernstein, E.A. Freeman, M.B. Kruskal, R.M. Kulsrud, Proc. Roy. Soc. London A244, 17 (1958)

11. Anhang

$$\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\chi}) := \nabla\times(\underline{\eta}\times\underline{\chi}) \tag{A.1}$$

$$\mathbb{P}_1(\underline{\eta},P) := -\left(\underline{\eta}\cdot\nabla P + \frac{5}{3}P\nabla\cdot\underline{\eta}\right) \tag{A.2}$$

$$\underline{\mathbb{B}}_{1i}(\underline{\eta}) := \underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{B}_{0i}) \qquad i=0,1,2,\ldots \tag{A.3}$$

$$\mathbb{P}_{1i}(\underline{\eta}) := \mathbb{P}_1(\underline{\eta},p_{0i}) \qquad i=0,1,2,\ldots \tag{A.4}$$

$$\underline{\mathbb{F}}_{0i}(\underline{\eta}) := \sum_{l=0}^{i}\left\{\left(\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{1l}(\underline{\eta})\right)\times\underline{B}_{0\,i-l} + \left(\nabla\times\underline{B}_{0l}\right)\times\underline{\mathbb{B}}_{1\,i-l}(\underline{\eta})\right\} + -\nabla\mathbb{P}_{1i}(\underline{\eta}) \qquad i=0,1,2,\ldots \tag{A.5}$$

$$\underline{\mathbb{G}}_{00}(\underline{\eta},\underline{\chi}) := (\nabla\times\underline{B}_{00})\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\chi})) + \left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\chi}))\right]\times\underline{B}_{00} + +\left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta})\right]\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\chi}) + \left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\chi})\right]\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta}) + -\nabla\mathbb{P}_1(\underline{\eta},\mathbb{P}_{10}(\underline{\chi})) \tag{A.6}$$

$$\underline{\mathbb{G}}_{01}(\underline{\eta},\underline{\eta}) := (\nabla\times\underline{B}_{00})\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta})) + \left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta}))\right]\times\underline{B}_{00} + +(\nabla\times\underline{B}_{01})\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta})) + \left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_1(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta}))\right]\times\underline{B}_{01} + +2\left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta})\right]\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta}) + 2\left[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta})\right]\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta}) + -\nabla\mathbb{P}_1(\underline{\eta},\mathbb{P}_{11}(\underline{\eta})) \tag{A.7}$$

$$\underline{\mathbb{H}}_{00}(\underline{\eta},\underline{\eta},\underline{\eta}) := (\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{00})\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta}))) +$$
$$+[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta})))]\times\underline{\mathbb{B}}_{00} +$$
$$+3[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta})]\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta})) +$$
$$+3[\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\eta},\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta}))]\times\underline{\mathbb{B}}_{10}(\underline{\eta}) +$$
$$-\nabla\mathbb{P}_{11}(\underline{\eta},\mathbb{P}_{11}(\underline{\eta},\mathbb{P}_{10}(\underline{\eta}))) \qquad (A.8)$$

$$(\underline{\eta}\cdot\underline{\chi}) := \int_{Pl}\underline{\eta}\cdot\underline{\chi}\;dV \qquad (A.9)$$

$$\underline{\mathbb{F}}_{0}(\underline{\xi}) := (\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{0})\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\xi},\underline{\mathbb{B}}_{0}) + [\nabla\times\underline{\mathbb{B}}_{11}(\underline{\xi},\underline{\mathbb{B}}_{0})]\times\underline{\mathbb{B}}_{0} - \nabla\mathbb{P}_{11}(\underline{\xi},\mathbb{P}_{0}) \qquad (A.10)$$

Herr Prof. Dr. E. Rebhan gab die Anregung zu dieser Arbeit. Für seine großzügige Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit möchte ich Ihm herzlich danken.
Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. K. Suchy, an dessen Institut ich diese Arbeit anfertigen konnte, sowie allen Mitarbeitern seines Instituts und Herrn Dr. Wenk, die ebenfalls zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Lebenslauf von Klaus - Achim Kratzsch

11. 7. 1952	geboren in Düsseldorf
1959 - 1973	Besuch der Volksschule und des Gymnasiums
Mai 1973	Abitur am Humboldt-Gymnasium in Düsseldorf
1973 - 1980	Studium der Physik und Mathematik an der Universität Düsseldorf
Sept. 1980	Diplom Hauptprüfung in Physik an der Universität Düsseldorf. Diplomarbeit bei Prof. E. Rebhan zum Thema: "Magnetohydrodynamische Untersuchungen zum Gleichgewicht und zur Stabilität extrem dicker axialsymmetrischer Plasmakonfigurationen bei möglicher Überlagerung eines zentralen Plasmafokus".
Nov. 1980 - April 1981	Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Physik II der Universität Düsseldorf
Mai 1981 - Dez. 1984	Wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. E. Rebhan am oben genannten Institut.

FOTODRUCK J. MAINZ GmbH
Neupforte 13, Nähe Markt, D-5100 Aachen
Telefon: (0241) 27305 und (0241) 38606